Les points de Stark-Heegner: résultats et problèmes

Conférence Québec-Maine
Université Laval
Ste-Foy, Québec
Octobre 2004

La formule de Dirichlet

Soit $\chi : (\mathbf{Z}/f\mathbf{Z})^\times \longrightarrow \pm 1, \quad \chi(-1) = 1$

un caractère de Dirichlet primitif *pair*.

Théorème (Dirichlet)

$$L'(0,\chi) = \log\left(\prod_{a=1}^{f}\left(1 - e^{\frac{2\pi i a}{f}}\right)^{\chi(a)}\right).$$

L'expression $u(\chi) := \prod_{a=1}^{f}\left(1 - e^{\frac{2\pi i a}{f}}\right)^{\chi(a)}$ est une unité remarquable de $\mathbf{Q}(\sqrt{f})$, appelée *unité cyclotomique*, ou *unité circulaire*.

Les conjectures de Stark

F= corps de nombres

$\zeta(F, \mathcal{A}, s)$= fonction zeta partielle associée à une classe d'idéaux $\mathcal{A}$ (au *sens étroit*).

Conjecture (Stark) Si $\zeta(F, \mathcal{A}, 0) = 0$, alors il existe une unité $u(\mathcal{A})$ du corps de classe de Hilbert de F (au sens étroit) telle que

$$\zeta'(F, \mathcal{A}, 0) = \log |u(\mathcal{A})|.$$

On appelle l'unité $u(\mathcal{A})$ une *unité de Stark*.

Note: On ne connaît pas *d'expression indépendante* pour $u(\mathcal{A})$.

Courbes elliptiques

But: Etendre cet aspect des conjectures de Stark aux courbes elliptiques.

E= courbe elliptique sur $\mathbf{Q}$

$L(E, s)$ = sa fonction L de Hasse-Weil

Conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer. Si $L(E, 1) = 0$, alors il existe $P \in E(\mathbf{Q})$ tel que

$$L'(E, 1) = \widehat{h}(P) \cdot (\text{période explicite}).$$

Remarque: Comme pour la conjecture de Stark, il n'y a pas de *formule indépendante* pour P.

Points de Heegner

Paramétrisation modulaire attachée à E:

$$\Phi : \mathcal{H}/\Gamma_0(N) \longrightarrow E(\mathbf{C}).$$

Soit $K = \mathbf{Q}(\sqrt{-D}) \subset \mathbf{C}$ un corps *quadratique imaginaire*.

Théorème. Si τ appartient à $\mathcal{H} \cap K$, alors $\Phi(\tau)$ appartient à $E(K^{\mathrm{ab}})$.

Ce théorème fournit une collection *systématique* de points sur E définis sur les corps de classe des corps quadratiques imaginaires.

Kolyvagin: Ils permettent "d'organiser" l'arithmétique des courbes elliptiques, dans le sens de l'exposé de Mazur de ce matin.

Points de Heegner

Si $\tau \in \mathcal{H} \cap K$, soit

$$F_\tau(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$$

une forme quadratique primitive avec

$$F_\tau(\tau, 1) = 0, \quad N|A.$$

On pose $\mathrm{Disc}(\tau) := \mathrm{Disc}(F_\tau)$.

$$\mathcal{H}^D := \{\tau \text{ s.t. } \mathrm{Disc}(\tau) = D.\}.$$

$H_D =$ ring class field de K associé à D.

Théorème 1. Si τ appartient à $\mathcal{H}^D$, alors $P_D := \Phi(\tau)$ appartient à $E(H_D)$.

2. (Gross-Zagier)

$$L'(E/K, \mathcal{A}, 1) = \hat{h}(P_D) \cdot (\text{période})$$

La conjecture de Stark-Heegner

Conjecture sur les points de Stark-Heegner:

Les points de Heegner admettent des *variantes*, qui sont aux points classiques de Heegner ce que les unités de Stark sont aux unités cyclotomiques/elliptiques.

Cadre général de la construction:

E défini sur F;

$K =$ extension quadratique de F;

Les points de Stark-Heegner devraient alors être définis sur des corps de classes d'anneaux de K.

Contextes les mieux explorés:

1. $F = \mathbf{Q}$, $K =$ corps quadratique réel.

Données expérimentales (Green, Pollack);

Résultats théoriques (Bertolini);

Analogie aves les unités de Gross-Stark (Dasgupta).

2. $F =$ corps totalement réel, $K =$ extension ATR ("Almost Totally Real").

Logiciels et données expérimentales (Logan);

Analogie avec les unités de Stark (Charollois).

3. $F =$ corps quadratique imaginaire.

Travaux en cours (Trifkovic, Balasubramaniam).

Corps quadratiques réels

Il s'agit d'un *exemple-clé*.

E de conducteur $N = pM$, avec $p \not| M$.

$\mathcal{H}_p := \mathbf{C}_p - \mathbf{Q}_p$ (Analogue p-adique de $\mathcal{H}$)

$K =$ corps quadratique réel, plongé dans $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}_p$.

Motivation naive: $\mathcal{H} \cap K = \emptyset$, mais $\mathcal{H}_p \cap K$ est souvent non-vide!

But: Définir une "paramétrisation modulaire" p-adique

$$\Phi : \mathcal{H}_p^D / \Gamma_0(M) \longrightarrow E(H_D),$$

pour des discriminants D *positifs*.

La définition de Φ repose sur des idées introduites dans la **thèse de Dasgupta** (Berkeley, 2004).

Théorie de Hida

$U =$ disque p-adique dans $\mathbf{Q}_p$ avec $2 \in U$;

$\mathcal{A}(U) =$ anneau des fonctions p-adiques analytiques sur U.

Hida. Il existe une unique q-expansion

$$f_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \underline{a}_n q^n, \quad \underline{a}_n \in \mathcal{A}(U),$$

telle que, $\forall k \geq 2$, $k \in \mathbf{Z}$, $k \equiv 2 \pmod{p-1}$,

$$f_k := \sum_{n=1}^{\infty} \underline{a}_n(k) q^n$$

est une forme de poids k sur $\Gamma_0(N)$, vecteur propre pour les opérateurs de Hecke, et

$$f_2 = f_E.$$

Pour $k > 2$, f_k provient d'une newform de niveau M, appelée $f_k^\dagger$.

Points de Heegner pour les corps quadratiques réels

Définition. Si $\tau \in \mathcal{H}_p/\Gamma_0(M)$, soit $\gamma_\tau \in \Gamma_0(M)$ un générateur de $\mathrm{Stab}_{\Gamma_0(M)}(\tau)$.

Soit $r \in \mathbf{P}_1(\mathbf{Q})$. On considère la "période de Shimura" attachèe à τ et $f_k^\dagger$:

$$J_\tau^\dagger(k) := \Omega_E^{-1} \int_r^{\gamma_\tau r} (z-\tau)^{k-2} f_k^\dagger(z) dz.$$

Cette période ne dépend pas du choix de point base r.

Proposition. Il existe $\lambda_k \in \mathbf{C}^\times$ tels que $\lambda_2 = 1$ et

$$J_\tau(k) := \lambda_k^{-1}(a_p(k)^2 - 1) J_\tau^\dagger(k)$$

prend ses valeurs dans $\bar{\mathbf{Q}} \subset \mathbf{C}_p$ et se prolonge en une fonction p-adique analytique de $k \in U$.

La définition de Φ

Note: $J_\tau(2) = 0$. On pose:

$$\log_E \Phi(\tau) := \frac{d}{dk} J_\tau(k)|_{k=2}.$$

On dispose d'une recette précise pour calculer $\Phi(\tau)$ (pas seulement son logarithme p-adique).

Conjecture 1. Si τ appartient à $\mathcal{H}^D$, alors

$$P_D := \Phi(\tau) \text{ appartient à } E(H_D).$$

2. ("Gross-Zagier")

$$L'(E/K, \mathcal{A}, 1) = \widehat{h}(P_D) \cdot (\text{période})$$

Exemples Numériques

Logiciels écrits en Magma — `shp` (dévelopés avec l'aide de Green, Pollack)

`www.math.mcgill.ca/darmon/programs/shp`

$E = X_0(11) : y^2 + y = x^3 - x^2 - 10x - 20.$

$>$ HP,P,hD := stark_heegner_points(E,8,Qp);

The discriminant D = 8 has class number 1

Computing point attached to quadratic form (1,2,-1)

Stark-Heegner point (over Cp) =

$$(-2088624084707821, 1566468063530870w + 2088624084707825) + O(11^{15})$$

This point is close to $[9/2, 1/8(7s-4), 1]$

$(9/2 : 1/8(7s-4) : 1)$ is a global point on E(K).

Un second exemple

$E = 37A : y^2 + y = x^3 - x, \quad D = 1297.$

$>$,,hD := stark_heegner_points(E,1297,Qp);

The discriminant D = 1297 has class number 11

1 Computing point for quadratic form (1,35,-18)

2 Computing point for quadratic form (-4,33,13)

3 Computing point for quadratic form (16,9,-19)

4 Computing point for quadratic form (-6,25,28)

5 Computing point for quadratic form (-8,23,24)

6 Computing point for quadratic form (2,35,-9)

7 Computing point for quadratic form (9,35,-2)

8 Computing point for quadratic form (12,31,-7)

9 Computing point for quadratic form (-3,31,28)

10 Computing point for quadratic form (12,25,-14)

11 Computing point for quadratic form (14,17,-18)

Sum of the Stark-Heegner points (over Cp) =

$(0 : -1 : 1)) + O(37^{100})$

This p-adic point is close to $[0, -1, 1]$

$(0 : -1 : 1)$ is indeed a global point on E(K).

Polynomial hD satisfied by the x-coordinates:

$$\begin{aligned} 961x^{11} &- 4035x^{10} - 3868x^9 + 19376x^8 + 13229x^7 \\ &- 27966x^6 - 21675x^5 + 11403x^4 + 11859x^3 \\ &+ 1391x^2 - 369x - 37 \end{aligned}$$

> G := GaloisGroup(hD);

Permutation group G acting on a set of cardinality 11

(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11)

(1, 10)(2, 9)(3, 8)(4, 7)(5, 6)

> #G;

22

Un résultat théorique

$$\chi : G_D := \mathrm{Gal}(H_D/K) \longrightarrow \pm 1$$

$$\zeta(K, \chi, s) = L(s, \chi_1)L(s, \chi_2).$$

$P(\chi) := \sum_{\sigma \in G_D} \chi(\sigma)\Phi(\tau^\sigma), \quad \tau \in \mathcal{H}^D.$

$H(\chi) :=$ extension de K découpée par χ.

Théorème (Bertolini, D).

Si $a_p(E)\chi_1(p) = -\mathrm{signe}(L(E, \chi_1, s))$, alors

1. $\log P(\chi) = \log \tilde{P}(\chi)$, avec $\tilde{P}(\chi) \in E(H(\chi))$.

2. Le point $\tilde{P}(\chi)$ est d'ordre infini, si et seulement si $L'(E/K, \chi, 1) \neq 0$.

La démonstration repose sur une vieille méthode de Kronecker (“solution de l'équation de Pell au moyen de la fonction eta de Dedekind.”)