Układy dynamiczne

Zadania przygotowawcze do pierwszego kolokwium

Zadanie 1. Które z wymienionych przekształceń $\mathbb{R}$ są topologicznie sprzężone? Które są $\mathcal{C}^1$ sprzężone? $f(x) = \frac{x}{2}, f(x) = 2x, f(x) = -2x, f(x) = x^3$.

Zadanie 2. Wykaż, że $f(x) = x^3 + \frac{x}{2}$ jest $\mathcal{C}^1$ strukturalnie stabilny.

Zadanie 3. Niech $f\colon X \to X, g\colon Y \to Y$ będą półsprzężone odwzorowaniem $h\colon X \to Y$. Niech x będzie punktem o najkrótszym okresie n. Wykaż, że $h(x)$ jest punktem okresowym dla g i jego okres dzieli n. Wykaż, że jeżeli h jest sprzężeniem, to okres $h(x)$ wynosi n.

Zadanie 4. Które z następujących dyfeomorfizmów okręgu są strukturalnie stabilne? Które są Morse'a Smale'a?
(a) $f(\theta) = \theta + \alpha \bmod 2\pi$, gdzie $\frac{\alpha}{\pi}$ jest niewymierne.
(b) $g(\theta) = \theta + \alpha \bmod 2\pi$, gdzie $\frac{\alpha}{\pi}$ jest wymierne.
(c) $h_\alpha(\theta) = \theta + \alpha \sin\theta \bmod 2\pi$, gdzie $\alpha \in (0, 0.2)$.

Zadanie 5. Uzasadnij, że pole wektorowe klasy $\mathcal{C}^1$ (na gładkiej zwartej rozmaitości) z nieskończona liczbą zer nie jest $\mathcal{C}^1$ strukturalnie stabilne.

Zadanie 6. Niech γ będzie izolowaną orbitą zamkniętą pola wektorowego X klasy $\mathcal{C}^r$ na dwuwymiarowej zwartej rozmaitości$M$. Pokazać, że istnieje otoczenie $V \supset \gamma$ takie, że dla każdego $p \in V$ albo $\alpha(p) = \gamma$, albo $\omega(p) = \gamma$.

Zadanie 7. Wykaż, że jeśli $p \in M$ jest hiperbolicznym punktem stałym dyfeomorfizmu $f\colon M \to M$, to dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje otoczenie V punktu p w M takie, że każdy punkt okresowy w $V \backslash \{p\}$ ma okres większy niż n.

Zadanie 8. Niech X będzie polem wektorowym na M mającym orbitę zamkniętą. Niech Φ_t będzie potokiem tego pola. Pokaż, że dyfeomorfizm Φ_1 nie jest strukturalnie stabilny.

Zadanie 9. Niech $a > 1, ac > 1, 0 < c < 1, \epsilon > 0$. Sprawdź, ze homeomorfizm sprzęgający przekształcenie $\Phi(x, y, z) = (ax, ac(y + \epsilon xz, cz)$ z jego częścią liniową w otoczeniu stałego punktu hiperbolicznego 0 nie jest klasy $\mathcal{C}^1$.

Zadanie 10. Wykaż, że dla (nieodwracalnego!) przekształcenia torusa zadanego macierzą

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

punkty okresowe są gęste.

Zadanie 11. Znajdź dyfeomorfizm Anosowa torusa n–wymiarowego, $n > 3$.

Zadanie 12. Załóżmy, że $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jest dyfeomorfizmem dla którego Λ jest zwartym niezmienniczym zbiorem hiperbolicznym. Załóżmy, że wymiar każdej podprzestrzeni rozkładu jest równy 1. Wykaż, ze rozkład jest ciągły (a nawet Höldera).

Zadanie 13. Przypuśćmy, że dla każdego $t \in [ab], f_t\colon M \to M$ jest dyfeomorfizmem strukturalnie stabilnym. Wykaz, że f_a i f_b są topologicznie sprzężone.

Zadanie 14. Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie zdefiniowany jako $f(x) = x + 1$. Wykaż, ze istnieje $\epsilon > 0$ taki, że jeśli g klasy $\mathcal{C}^1$ spełnia $|f(x) - g(x)| < \epsilon$ oraz $|f'(x) - g'(x)| < \epsilon$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$, to f i g są $\mathcal{C}^1$ sprzężone.

Zadanie 15. * Niech F będzie podniesieniem ciągłego przekształcenia okręgu w siebie, stopnia 1. Wykaż, że zbiór wszystkich granic dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n_j \to \infty} \frac{1}{n_j} F^{n_j}(x)$$

jest domkniętym odcinkiem.

Zadanie 16. * Niech f będzie $\mathcal{C}^1$ dyfeomorfizmem okręgu, sprzęzonym topologicznie z obrotem o kąt niewymierny. Wykaż, że f jest $\mathcal{C}^1$ sprzężony z obrotem wtedy i tylko wtedy, kiedy ciąg norm supremum $||\log Df^i||$ jest ograniczony. Wskazówka: lemat Gottschalka-Hedlunda (zadanie 1 z ostatniej listy).

Zadanie 17. Wykaż, że dyfeomorfizmy Morse'a–Smale'a nie są gęstym podzbiorem dyfeomorfizmów sfery dwuwymiarowej $\mathcal{D}\mathrm{iff}(\mathcal{S}^2)$ (z topologią $\mathcal{C}^1$).

Zadanie 18. * Wykaż, że przekształcenie torusa zadane macierzą

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

jest ergodyczne względem miary Lebesgue'a.

Zadanie 19. * Wykaz, że jeśli $f(z) = z \prod_{k=1}^{n} \frac{z-a_k}{1-\bar{a_k} z}$, gdzie $z, a_k \in \mathbb{C}, |a_k| < 1$ (tzw. produkt Blaschke), to f zachowuje miarę Lebesgue'a na okręgu jednostkowym.

Zadanie 20. Oznaczmy przez $[a_1, a_2 \ldots]$ kolejne liczby naturalne rozkładu liczby $x \in (01]$ w ułamek łańcuchowy. Wykaż, że dla p.w. x zachodzi

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} < \infty.$$