Układy dynamiczne

Zadania domowe (seria III)

Zadanie 1. Niech $f\colon \mathcal{T}^2 \to \mathcal{T}^2$ ($\mathcal{T}^2 = \mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1 = \mathbb{R} \bmod 1 \times \mathbb{R} \bmod 1$) będzie przekształceniem indukowanym przez przekształcenie o macierzy

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

działajace na $\mathbb{R}^2$. Wykaż następującą wrażliwość ze względu na warunki początkowe. Dla dowolnego niepustego zbioru otwartego $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}^2$ istnieją punkty $x, y \in \mathcal{U}$ oraz $n \in \mathbb{N}$, że obrazy x, y po n krokach w metryce indukowanej z $\mathbb{R}^2$ są daleko, mianowicie $|f^n(x), f^n(y)| > \frac{1}{2}$.

Zadanie 2. Wykaż, że jeśli na zwartej dwuwymiarowej rozmaitości M zadany jest potok Anosova, to M jest torusem. (Przypomnienie: *Dyfeomorfizm Anosova* pewnej zwartej rozmaitości to taki dyfeomorfizm, dla którego cała rozmaitość jest zbiorem hiperbolicznym. (tzn. istnieje dla każdego punktu niezmienniczy rozkład wiązki stycznej na wiązkę stabilną i niestabilną. W przypadku *potoku Anosova* dochodzi jeszcze niezmienniczy kierunek potoku.)

Zadanie 3. Podaj przykład dyfeomorfizmu Anosova trójwymiarowego torusu $\mathcal{T}^3 = \mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1$.

Zadanie 4. Wykaż, że na każdej zwartej $\mathcal{C}^1$ rozmaitości istnieje funkcja Morse'a, czyli funkcja o niezdegenerowanych punktach krytycznych (tzn. zerowanie się gradientu pociąga nieosobliwość macierzy drugich pochodnych).

Układy dynamiczne

Zadania domowe (seria III)

Zadanie 1. Niech $f\colon \mathcal{T}^2 \to \mathcal{T}^2$ ($\mathcal{T}^2 = \mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1 = \mathbb{R} \bmod 1 \times \mathbb{R} \bmod 1$) będzie przekształceniem indukowanym przez przekształcenie o macierzy

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

działajace na $\mathbb{R}^2$. Wykaż następującą wrażliwość ze względu na warunki początkowe. Dla dowolnego niepustego zbioru otwartego $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}^2$ istnieją punkty $x, y \in \mathcal{U}$ oraz $n \in \mathbb{N}$, że obrazy x, y po n krokach w metryce indukowanej z $\mathbb{R}^2$ są daleko, mianowicie $|f^n(x), f^n(y)| > \frac{1}{2}$.

Zadanie 2. Wykaż, że jeśli na zwartej dwuwymiarowej rozmaitości M zadany jest potok Anosova, to M jest torusem. (Przypomnienie: *Dyfeomorfizm Anosova* pewnej zwartej rozmaitości to taki dyfeomorfizm, dla którego cała rozmaitość jest zbiorem hiperbolicznym. (tzn. istnieje dla każdego punktu niezmienniczy rozkład wiązki stycznej na wiązkę stabilną i niestabilną. W przypadku *potoku Anosova* dochodzi jeszcze niezmienniczy kierunek potoku.)

Zadanie 3. Podaj przykład dyfeomorfizmu Anosova trójwymiarowego torusu $\mathcal{T}^3 = \mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1$.

Zadanie 4. Wykaż, że na każdej zwartej $\mathcal{C}^1$ rozmaitości istnieje funkcja Morse'a, czyli funkcja o niezdegenerowanych punktach krytycznych (tzn. zerowanie się gradientu pociąga nieosobliwość macierzy drugich pochodnych).