Układy dynamiczne

Zadania domowe (seria I)

Zadanie 1. Znajdź punkty okresowe, zbadaj ich stabilność i opisz obraz fazowy dla przekształcenia okręgu zadanego przez

$$g(\theta) = \theta + \frac{2\pi}{n} + \epsilon \sin(n\theta) \mod 2\pi,$$

dla $n \geqslant 2$ oraz $\epsilon < \frac{1}{n}$.
(Punkt x trajektorii okresowej przekształcenia f o okresie m nazywamy *stabilnym*, jeśli x jest stabilny dla przekształcenia f^m.)

Zadanie 2. Wykaż, że dla homeomorfizmu okręgu f zachowującego orientację liczba obrotu daje się przedstawić jako iloraz $\frac{p}{q}$, gdzie p i q są liczbami całkowitymi, $q > 0$, wtedy i tylko wtedy, kiedy istnieje taki punkt x okręgu, że $f^q(x) = x$.

Zadanie 3. Niech $f : \mathcal{S}^1 \to \mathcal{S}^1$ będzie homeomorfizmem okręgu zachowującym orientację, którego liczba obrotu jest liczba niewymierną. Przypomnijmy, że zbiór ω *graniczny* $\omega(x)$ jest definiowany jako $\{y \in \mathcal{S}^1 : \exists n_k \to \infty : f^{n_k}(x) \to y\}$. Wykaż, że
(a) $\omega(x)$ nie zależy od $x \in \mathcal{S}^1$,
(b) $\omega(x)$ jest najmniejszym domkniętym zbiorem niezmienniczym przekształcenia f (tzw. *zbiorem minimalnym*),
(c) $\omega(x)$ jest albo całym okręgiem albo jest podzbiorem Cantora okręgu (czyli jest domknięty brzegowy bez punktów izolowanych).

Układy dynamiczne

Zadania domowe (seria I)

Zadanie 1. Znajdź punkty okresowe, zbadaj ich stabilność i opisz obraz fazowy dla przekształcenia okręgu zadanego przez

$$g(\theta) = \theta + \frac{2\pi}{n} + \epsilon \sin(n\theta) \mod 2\pi,$$

dla $n \geqslant 2$ oraz $\epsilon < \frac{1}{n}$.
(Punkt x trajektorii okresowej przekształcenia f o okresie m nazywamy *stabilnym*, jeśli x jest stabilny dla przekształcenia f^m.)

Zadanie 2. Wykaż, że dla homeomorfizmu okręgu f zachowującego orientację liczba obrotu daje się przedstawić jako iloraz $\frac{p}{q}$, gdzie p i q są liczbami całkowitymi, $q > 0$, wtedy i tylko wtedy, kiedy istnieje taki punkt x okręgu, że $f^q(x) = x$.

Zadanie 3. Niech $f : \mathcal{S}^1 \to \mathcal{S}^1$ będzie homeomorfizmem okręgu zachowującym orientację, którego liczba obrotu jest liczba niewymierną. Przypomnijmy, że zbiór ω *graniczny* $\omega(x)$ jest definiowany jako $\{y \in \mathcal{S}^1 : \exists n_k \to \infty : f^{n_k}(x) \to y\}$. Wykaż, że
(a) $\omega(x)$ nie zależy od $x \in \mathcal{S}^1$,
(b) $\omega(x)$ jest najmniejszym domkniętym zbiorem niezmienniczym przekształcenia f (tzw. *zbiorem minimalnym*),
(c) $\omega(x)$ jest albo całym okręgiem albo jest podzbiorem Cantora okręgu (czyli jest domknięty brzegowy bez punktów izolowanych).