Układy dynamiczne

Kolokwium I (6 kwietnia 2005, 12:15–13:45)

Zadanie 1. Rozstrzygnij, korzystając tylko z definicji, czy przekształcenie identycznościowe okręgu $f\colon \mathcal{S}^1 \to \mathcal{S}^1$, $f(x) = x$ jest $\mathcal{C}^1$ strukturalnie stabilne i czy jest Morse'a–Smale'a.

Zadanie 2. Czy przekształcenie torusa dwuwymiarowego zadane macierzą

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

jest dyfeomorfizmem Anosova?

Zadanie 3. Dane są dwa topologicznie sprzężone homeomorfizmy okręgu zachowujące orientację. Wykaż, że ich liczby obrotu są równe.

Zadanie 4. Oznaczmy przez $[a_1, a_2 \ldots]$ kolejne liczby naturalne rozkładu liczby $x \in (01]$ w ułamek łańcuchowy. Wykaż, że dla p.w. x zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \ldots + \sqrt{a_n}}{n} < \infty.$$

Zadanie 5. (nieobowiązkowe) Niech γ będzie orbitą rekurencyjną potoku Φ_t pola X klasy $\mathcal{C}^1$ na zwartej rozmaitości M (tzn. $\gamma \subset \omega(\gamma)$). Wykaż, że każdy punkt $x \in \gamma$ jest rekurencyjny także dla dyfeomorfizmu Φ_1, tzn., że istnieje ciąg $\mathbb{N} \ni n_k \to \infty$ taki, że $\Phi_1^{n_k}(x) \to x$.

Układy dynamiczne

Kolokwium I (6 kwietnia 2005, 12:15–13:45)

Zadanie 1. Rozstrzygnij, korzystając tylko z definicji, czy przekształcenie identycznościowe okręgu $f\colon \mathcal{S}^1 \to \mathcal{S}^1$, $f(x) = x$ jest $\mathcal{C}^1$ strukturalnie stabilne i czy jest Morse'a–Smale'a.

Zadanie 2. Czy przekształcenie torusa dwuwymiarowego zadane macierzą

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

jest dyfeomorfizmem Anosova?

Zadanie 3. Dane są dwa topologicznie sprzężone homeomorfizmy okręgu zachowujące orientację. Wykaż, że ich liczby obrotu są równe.

Zadanie 4. Oznaczmy przez $[a_1, a_2 \ldots]$ kolejne liczby naturalne rozkładu liczby $x \in (01]$ w ułamek łańcuchowy. Wykaż, że dla p.w. x zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \ldots + \sqrt{a_n}}{n} < \infty.$$

Zadanie 5. (nieobowiązkowe) Niech γ będzie orbitą rekurencyjną potoku Φ_t pola X klasy $\mathcal{C}^1$ na zwartej rozmaitości M (tzn. $\gamma \subset \omega(\gamma)$). Wykaż, że każdy punkt $x \in \gamma$ jest rekurencyjny także dla dyfeomorfizmu Φ_1, tzn., że istnieje ciąg $\mathbb{N} \ni n_k \to \infty$ taki, że $\Phi_1^{n_k}(x) \to x$.