Teoria sterowania

Zadania przygotowawcze do drugiego kolokwium

Zadanie 1. Dane jest równanie drugiego rzędu
(a) $\ddot{x} + \dot{x} = u, \quad x \in \mathbb{R}, \|u\| \leqslant 1.$
(b) $\ddot{x} - \dot{x} = u, \quad x \in \mathbb{R}, \|u\| \leqslant 1.$
Rozwiąż problem czasooptymalnego sterowania do punktu $(x, \dot{x}) = (0, 0)$.
(i) Podaj równania fragmentów trajektorii optymalnych,
(ii) Podaj liczbę i czasy zmian sterowania,
(iii) Znajdź obszar, z którego $(x, \dot{x}) = (0, 0)$ jest osiągalny,
(iv) Naszkicuj rysunek.

Zadanie 2. Rozważmy problem czasooptymalny $\ddot{x} + 2x\dot{x} + 3x = u,\ x, u \in \mathbb{R},\ |u| \leqslant 1$. Znajdź obszar, z którego optymalnie sterując do punktu $(x, \dot{x})$ wystarczy najwyżej jedna zmiana sterowania.

Zadanie 3. Korzystając z ZMP wyznacz optymalne trajektorie dla następujących problemów

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u \qquad u \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_2 + u \qquad u \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

$$x(0) = x^0 \in \mathbb{R}^2,\ x(T) = (0, 0)\ (T \text{ jest ustalone})$$

$$\frac{1}{2} \int_0^T u^2 dt \to \min$$

Zadanie 4. Samochód Dubinsa
Rozważmy problem sterowania samochodem mogącym poruszać się w przód ze stałą prędkością liniową i jednocześnie zakręcać z ograniczoną prędkością kątową. Tzw. „Dubins car problem” polega na znalezieniu czasooptymalnej trajektorii przeprowadzającej samochód z dowolnej konfiguracji początkowej (położenie + orientacja) do dowolnej końcowej.

Po odpowiednim przeskalowaniu powyższy problem sprowadza się do czasooptymalnego sterowania poniższym układem

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \cos\theta, \\ \dot{x}_2 = \sin\theta, \\ \dot{\theta} = u, \quad |u| \leqslant 1, \end{cases}$$

$$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ \theta \in S^1,$$

$$x(0) = x_0,\ \theta(0) = \theta_0, \quad x(T) = x_T,\ \theta(T) = \theta_T,$$

$$T \to \min$$

Zadanie 5. Dany jest układ sterowania

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2 \qquad |u| \leqslant 1 \\ \dot{x}^2 = -x^1 + u \end{cases} \tag{1}$$

Znajdź sterowanie przeprowadzające punkt (x_0^1, x_0^2) do zbioru $B = \{(x^1, x^2) \colon (x^1)^2 + (x^2)^2 \leqslant R^2\}$ w najkrótszym czasie (stałą $R > 0$ można sobie dowolnie wybrać).

Zadanie 6. Dla zagadnienia wariacyjnego na płaszczyźnie $v = (x, y)$ z funkcjonałem

$$\int \langle \dot{v}, \dot{v} \rangle + 2\langle C\dot{v}, v \rangle - \langle (Id + C^2)v, v \rangle,$$

gdzie

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

zbadaj ekstremale i drugą wariację.

Zadanie 7. (dla ambitnych) Rozwiąż poprzednie zadanie dla dowolnej macierzy C antysymetrycznej.

Zadanie 8. Dana jest metryka Riemannowska na płaszczyźnie ze współczynnikiem $\frac{4}{4+|x|^2}$ (czyli długości wektorów zaczepionych w x modyfikujemy o ten współczynnik. Wykaż, że okrąg o środku 0 i promieniu 2 jest ekstremalą tego funkcjonału, zbadaj drugą wariację. Jak wyglądają pozostałe ekstremale?

Zadanie 9. Podaj przykład zagadnienia wariacyjnego, takiego że
(a) na pewnej ekstremali funkcjonał spełnia warunek Legendre'a, ale od pewnego czasu ta ekstremala nie minimalizuje funkcjonału, bo druga wariacja nie jest nieujemna,
(b) każda ekstremala dla dowolnego czasu minimalizuje funkcjonał.

Zadanie 10. W $\mathbb{R}^n$ dana jest podrozmaitość M wymiaru $n-1$. Niech $N \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ będzie podrozmaitością składająca się z par (x,p), gdzie $x \in M$, a p jest wektorem prostopadłym do M w punkcie x. Wykaż, że N jest Lagrangowska.

Zadanie 11. Wykaż, że dowolna dwuliniowa forma antysymetryczna na przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ daje się za pomocą liniowej zmiany współrzędnych sprowadzić do postaci $\sum_{i=1}^n dx^i \wedge dp^i$. Innymi słowy wykaż, że dowolna macierz symetryczna A daje się przestawić jako $A = P^t B P$, gdzie

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$