Teoria sterowania

Kolokwium I (12 kwietnia 2005, 18:15–19:45)

Zadanie 1. Niech $A \in \mathbf{M}(n,n)$, $B \in \mathbf{M}(n,m)$. Zakładając, że para (A,B) jest sterowalna, wykaż że układ

$$\begin{aligned}\dot{y} &= Ay + Bv\\ \dot{v} &= u,\end{aligned}$$

z przestrzenią stanu $\mathbb{R}^{n+m}$ i sterowaniem w $\mathbb{R}^m$ jest także sterowalny.

Zadanie 2. Znajdź ekstremalę (rozwiązanie równań Eulera-Lagrange'a) o zadanych warunkach brzegowych dla następującego funkcjonału

$$\int_0^1 (2tx - (x')^2 + 3x'x^2)dt,\ x(0) = 0,\ x(1) = -1.$$

Czy ta ekstremala może minimalizować funkcjonał?

Zadanie 3. Dane są trzy ciała o masach równych 1 oraz trzy sprężynki, z których dwie rozpięte są pomiędzy ciałami, a trzecia między ostatnim ciałem a ścianą. Znamy współczynniki sprężystości sprężynek. Grawitację pomijamy. Czy obserwując tylko położenie środkowego ciała jesteśmy w stanie ustalić położenia pozostałych ciał układu? Podaj warunek na współczynniki sprężystości.

Zadanie 4. Dany jest funkcjonał

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx,$$

określony na funkcjach gładkich $y(x)$, których dziedzina $[x_0, x_1]$ jest ustalona, a $y(x_0), y(x_1)$ możemy wybierać dowolnie. Wykaż, że jeśli funkcja $y(x)$ minimalizuje funkcjonał J, to spełnia równania Eulera–Lagrange'a oraz $\frac{dF}{dy'}(x_0, y(x_0), y'(x_0)) = \frac{dF}{dy'}(x_1, y(x_1), y'(x_1)) = 0$.

Zadanie 5. Dana jest na kole $\{x\colon |x| < 1\} \subset \mathbb{R}^2$ następująca metryka Finslera. Wektor y zaczepiony w punkcie x ma długość Finslera 1 wtedy i tylko wtedy kiedy $|x + y| = 1$, gdzie $|\cdot|$ jest zwykłą długością euklidesową. Poza tym żądamy, żeby dla $\lambda > 0$ długość $|\cdot|_F$ Finslera spełniała $|\lambda y|_F = \lambda |y|_F$. Długość skierowanej krzywej mierzymy całkując długość wektora stycznego – nie zależy ona od parametryzacji. Wykaż, że ekstremale funkcjonału długości (najkrótsze krzywe skierowane) są euklidesowymi odcinkami.