Generyczne oznaczenia: R–pierścień przemienny z 1, K–ciało

Dwie ogólne zasady dotyczące obchodzenia się z produktami kohomologicznymi:

α. "Jest tak, jak chciałoby się być".

ω. Znaki są zawsze źle.

$\times$–**produkty, I**

0. Uzupełnij te szczegóły dowodu tw. Eilenberga–Zilbera, które Cię niepokoją.
1. Sprawdź, że pojawiające się we wzorze Künnetha odwzorowanie $H_nC \otimes H_kC' \to H_{n+k}(C \otimes C')$ dane jest wzorem $[z] \otimes [z'] \mapsto [z \otimes z']$.

Podczas wykładu zdefiniowaliśmy (z dokładnością do naturalnej homotopii) odwzorowanie łańcuchowe $C_*X \otimes C_*Y \xrightarrow{\times} C_*(X \times Y)$. Indukuje ono odwzorowanie $H_*(C_*X \otimes C_*Y) \to H_*(X \times Y)$, które po złożeniu z odwzorowaniem $H_nX \otimes H_kY \to H_{n+k}(C_*X \otimes C_*Y)$ pochodzącym z ciągu Künnetha daje tzw. homologiczny $\times$-produkt $H_nX \otimes H_kY \to H_{n+k}(X \times Y)$. Oczywiście istnieje też wersja dla homologii o współczynnikach w pierścieniu ...

2. Uzasadnij, że jeśli K jest ciałem, to $\times\colon \oplus_{p+q=n} H_p(X,K) \otimes_K H_q(Y,K) \to H_n(X \times Y, K)$ jest izomorfizmem.
3. Na wykładzie określiliśmy $\theta\colon C_*(X \times Y) \to C_*X \otimes C_*Y$. Niech $f, g \in C^*(X,R)$; definiujemy $f \times g \in C^*(X \times Y, R)$ wzorem $(f \times g)(\sigma) = (f \otimes g)(\theta\sigma)$, gdzie $(f \otimes g)(a \otimes b) = f(a) \cdot g(b)$. Uzasadnij, że tak zdefiniowany $\times$ indukuje dobrze określone mnożenie $\times\colon H^*(X,R) \otimes_R H^*(Y,R) \to H^*(X \times Y, R)$. [W szczególności sprawdź niezależność od wyboru θ.]
4. Niech $\xi \in H^p(X,K)$, $\zeta \in H^q(Y,K)$, $a \in H_p(X,K)$, $b \in H_q(Y,K)$. Sprawdź, że $\langle \xi \times \zeta, a \times b\rangle = \xi(a) \cdot \zeta(b)$.
5. Udowodnij, że $\times\colon \oplus_{p+q=n} H^p(X,K) \otimes_K H^q(Y,K) \to H^n(X \times Y, K)$ jest izomorfizmem jeśli występujące w tym wzorze przestrzenie kohomologii są skończenie wymiarowe. [Wsk. Użyj wersji homologicznej, dualności: $H^\ell(X,K) \simeq \mathrm{Hom}_K(H_\ell(X,K),K)$, i poprzedniego zadania.]

$\cup$–**produkt**

Dla $c \in C^p(X,R)$ i $d \in C^q(X,R)$ definiujemy $c \cup d \in C^{p+q}(X,R)$ wzorem:

$$(c \cup d)(\sigma) = c(\sigma|_{[e_0,\dots,e_p]}) \cdot d(\sigma|_{[e_p,\dots,e_{p+q}]}),$$

przy czym $[e_p,\dots,e_{p+q}]$ utożsamiamy z $\Delta^q = [e_0,\dots,e_q]$ przez afiniczny izomorfizm zachowujący kolejność wierzchołków.

6. Uzasadnij że:
   z) $\delta(c \cup d) = \delta c \cup d + (-1)^{|c|} c \cup \delta d$.
   a) $c \cup (d \cup e) = (c \cup d) \cup e$.
   b) Jeśli $f\colon Y \to X$, to $f^*c \cup f^*d = f^*(c \cup d)$.
7. Wywnioskuj z poprzedniego zadania, że jeśli c i d są kocyklami, to $c \cup d$ też jest kocyklem, oraz że klasa kohomologii tego kocyklu zależy tylko od klas kohomologii kocykli c, d. W ten sposób $\cup$ indukuje iloczyn na H^*X, również oznaczany $\cup$.
8. Uzasadnij, że $\cup$ (na kohomologiach) jest łączny i naturalny.
9. Uzasadnij, że dla Δ-kompleksu X naturalne obcięcie $C^*(X,R) \to C^*_\Delta(X,R)$ indukuje izomorfizm na kohomologiach (zachowujący $\cup$).
10. Wylicz $\cup$ na $H^*(\mathbf{RP}^2, \mathbf{Z}/2)$.
11. Wylicz $\cup$ na $H^*(\Sigma, \mathbf{Z})$ dla zwartych spójnych orientowalnych powierzchni Σ.
12. Uzasadnij, że jeśli $T\colon C_*X \to C_*X$ jest naturalne, łańcuchowe i znormalizowane warunkiem $T(x) = x$ (dla $x \in X$ rozumianego jako element C_0X), to T indukuje identyczność na H_*X.
13. Uzasadnij, że jeśli $c, d \in C^*(X,R)$, to $d \cup c = (-1)^{|c|\cdot|d|}\big((c \circ T) \cup (d \circ T)\big) \circ T$, gdzie $T\colon C_nX \to C_nX$ dane jest wzorem $T\sigma = (-1)^{n(n+1)/2} \sigma \circ \mathit{flip}$, gdzie $\mathit{flip}\colon \Delta^n \to \Delta^n$ jest izomorfizmem afinicznym odwracającym kolejność wierzchołków. Uzasadnij, że T jest naturalne, łańcuchowe i znormalizowane. Wywnioskuj, że $\cup$ jest na kohomologiach 'przemienny': $\xi \cup \zeta = (-1)^{|\xi|\cdot|\zeta|} \zeta \cup \xi$.

$\times$–produkty, II

14. Określmy $\times\colon H^p(X,R)\otimes_R H^q(Y,R)\to H^{p+q}(X\times Y,R)$ wzotem $\xi\times\zeta=p_X^*(\xi)\cup p_Y^*(\zeta)$, gdzie p_X, p_Y to rzuty produktu $X\times Y$ na osie. Sprawdź, że ta definicja zgadza się z poprzednią. [Wsk. zapisz $(p_X^*(f)\cup p_Y^*(g))(\sigma)$ w postaci $(f\otimes g)(\theta'\sigma)$ i pokaż, że θ' jest łańcuchowo homotopijna z θ.]
15. Niech $d\colon X\ni x\mapsto(x,x)\in X\times X$. Sprawdź, że $\xi\cup\zeta=d^*(\xi\times\zeta)$.
16. Niech $1\in H^0(Y,R)$ niech będzie wiadomą klasą (tą, która na każdym punkcie wylicza się do 1). Uzasadnij, że 1 jest jedynką w pierścieniu $(H^*(Y,R),\cup)$. Uzasadnij też, że jeśli $\xi\in H^p(X,R)$, to $\xi\times 1=p_X^*(\xi)$ [Wsk. najpierw zrób to gdy Y jest punktem].
17. Uzasadnij wzór $(\xi\cup\zeta)\times(\eta\cup\mu)=\pm(\xi\times\eta)\cup(\zeta\times\mu)$ $(\xi,\zeta\in H^*(X,R),\ \eta,\mu\in H^*(Y,R))$. Jaki jest znak?
18. Uzasadnij, że izomorfizm $H^*(X,K)\otimes_K H^*(Y,K)\to H^*(X\times Y,K)$ z zadania 5 jest izomorfizmem pierścieni. [Wsk. Zdefiniuj mnożenie w iloczynie tensorowym K-algebr z gradacją tak, by poprzednie zadanie dawało tezę.]

Teoria Hodge'a, wersja do zabawy

19. Niech X będzie skończonym kompleksem symplicjalnym, C_*X i C^*X zaś jego kompleksami: łańcuchowym i kołańcuchowym (na użytek tego zadania: symplicjalnymi i o współczynnikach rzeczywistych). Oba te kompleksy utożsamiamy z przestrzenią $F(X)$ funkcji rzeczywistych na zbiorze wszystkich sympleksów kompleksu X. W $F(X)$ wprowadzamy iloczyn skalarny tak, by delty Diraca sympleksów tworzyły bazę ortonormalną. Niech $\mathbf{H}^nX=Z^nX\cap Z_nX$. Uzasadnij, że:
    a) $\mathbf{H}_nX$ jest dopełnieniem ortogonalnym B^nX w Z^nX.
    b) $\mathbf{H}_nX$ jest dopełnieniem ortogonalnym B_nX w Z_nX.
    c) Złożenie włożenia i naturalnego rzutowania $\mathbf{H}^nX\to Z_nX\to Z_nX/B_nX=H_nX$ jest izomorfizmem.
    d) $\mathbf{H}^nX\to Z^nX\to Z^nX/B^nX=H^nX$ też jest izomorfizmem.
    e) Operatory na przestrzeni $F(X)$: Diraca $D=\partial+\delta$ i Laplace'a $\Delta=\partial\delta+\delta\partial$ – są samosprzężone.
    f) $\mathbf{H}^*X=\oplus_n\mathbf{H}^nX=\ker(D)=\ker(\Delta)$.