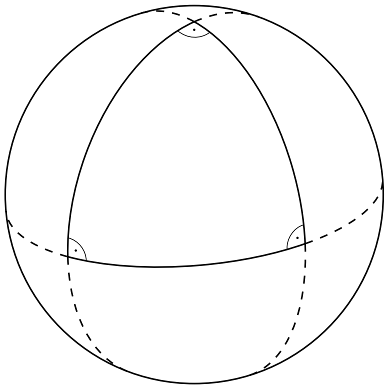
Krzywizna pseudosfery

Piotr PRZYTYCKI*

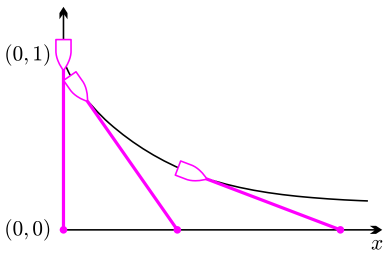


Rys. 1

Rozważmy sferę o promieniu R. Przypomnijmy, że najkrótszą krzywą na powierzchni sfery łączącą dwa wybrane jej punkty (tzw. geodezyjną) jest fragment okręgu wielkiego tej sfery. (Ciekawi niech potraktują ten fakt jako zadanie.) Sfera ma następującą pasjonującą własność: suma kątów wewnętrznych dowolnego trójkąta geodezyjnego (czyli trójkąta, którego krawędziami są geodezyjne) jest większa od π o miarę pola powierzchni tego trójkąta pomnożoną przez $\frac{1}{R^2}$.

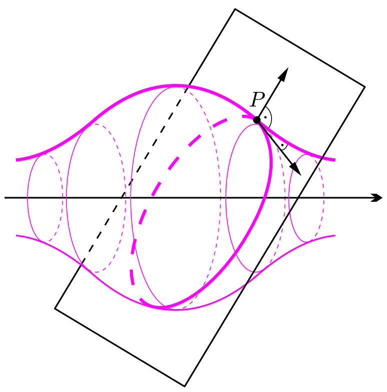
Sprawdźmy to na przykładzie trójkąta składającego się z połówek południków $45°E$ i $45°W$ oraz ćwiartki równika (rys. 1). Suma kątów wewnętrznych tego trójkąta jest równa $3 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi$, czyli jest o $\frac{\pi}{2}$ większa od π. Natomiast pole tego trójkąta stanowi $\frac{1}{8}$ powierzchni całej sfery, czyli $\frac{1}{8} \cdot 4\pi R^2$. Zatem po pomnożeniu przez $\frac{1}{R^2}$ rzeczywiście otrzymujemy $\frac{\pi}{2}$.

Jest to przejaw jednego z najwspanialszych twierdzeń geometrii różniczkowej – twierdzenia Gaussa–Bonneta. Mówi ono, że na każdej powierzchni M rolę czynnika $\frac{1}{R^2}$ odgrywa pewna funkcja rzeczywista $\kappa : M \to \mathbb{R}$. Ta funkcja, zwana *krzywizną* (Gaussa), opisuje lokalną geometrię powierzchni M: mianowicie, jeśli chcemy zbadać różnicę między sumą kątów wewnętrznych trójkąta geodezyjnego, a wartością π, to musimy scałkować funkcję κ po powierzchni tego trójkąta. Na przykład dla płaszczyzny ta funkcja jest stała i wynosi 0, a dla sfery o promieniu R też jest stała i wynosi $\frac{1}{R^2}$. (Ale dla elipsoidy krzywizna stała już nie jest.) Jak widać, im większa krzywizna, tym bardziej „zakrzywiona” jest rozważana powierzchnia – natomiast sfera o dużym promieniu, która lokalnie wydaje się prawie płaska, ma małą krzywiznę. Drugą ciekawą obserwacją jest to, że jeśli powierzchnia lokalnie nie jest „wypukła”, czyli przypomina siodło, to krzywizna staje się ujemna. Zajmiemy się taką właśnie powierzchnią, mianowicie wyliczymy, ile wynosi krzywizna pseudosfery – pewnej powierzchni obrotowej przypominającej trąbkę.



Rys. 2

Zdefiniujemy najpierw krzywą, z której obrotu powstaje pseudosfera. Wyobraźmy sobie, że wzdłuż osi x płaszczyzny morza z kartezjańskim układem współrzędnych przebiega pomost. W początkowej chwili w punkcie $(0, 0)$ stoi marynarz, który trzyma na sztywnym holu o długości 1 łódeczkę, która unosi się w punkcie $(0, 1)$. Następnie marynarz ciągnie łódkę posuwając się po pomoście w kierunku dodatnim. Tor ruchu łódki będzie miał tę własność, że wektor prędkości łódki będzie styczny do kierunku holu (patrz rys. 2). Krzywą, będącą torem ruchu łódki, nazywamy *traktrysą*. Obracając ją dookoła osi x, otrzymujemy powierzchnię nazywaną *pseudosferą*.

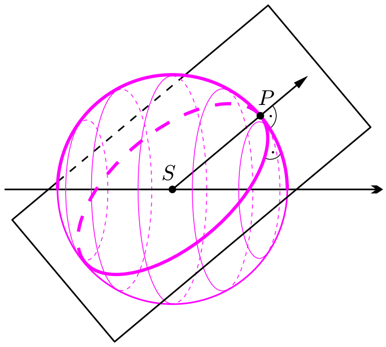


Rys. 3

Skorzystamy przy obliczaniu krzywizny tej powierzchni z recepty używanej na drugim roku przez studentów matematyki, ale unikniemy wykonywanych przez nich zazwyczaj nieprzyjemnych rachunków. Jedyny przepis potrzebny nam wcześniej to pojęcie *krzywizny* krzywej w przestrzeni (nie mylić z krzywizną powierzchni!). Krzywizna krzywej jest określona w każdym punkcie krzywej jako długość wektora przyspieszenia w tym punkcie, przy założeniu, że przebiegamy tę krzywą z jednostkową prędkością. Na przykład, dla ruchu po okręgu wiemy, że przyspieszenie wynosi $\frac{v^2}{R}$, więc skoro zakładamy, że $|v| = 1$, to krzywizna okręgu będzie w każdym punkcie równa $\frac{1}{R}$. Widzimy, że im mniejszy okrąg, bardziej „zakrzywiony”, tym większa krzywizna.

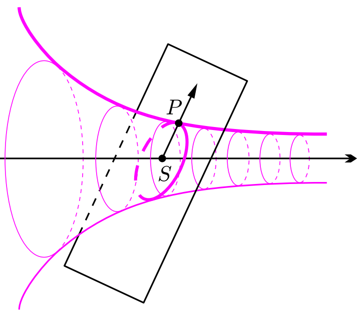
Możemy teraz wrócić do krzywizny powierzchni. Recepta dla powierzchni obrotowych brzmi następująco: ustal punkt P powierzchni, w którym masz ochotę wyliczyć krzywiznę. Rozważ następujące dwie krzywe na powierzchni przechodzące przez punkt P: południk (czyli krzywą płaską, którą obracamy) oraz drugą, będącą cięciem powierzchni obrotowej płaszczyzną prostopadłą do południka w punkcie P (rys. 3). Weź iloczyn krzywizn tych krzywych w punkcie P i postaw znak minus, jeśli funkcja dodatnia, której wykresem jest obracana krzywa, jest wypukła.

*Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego



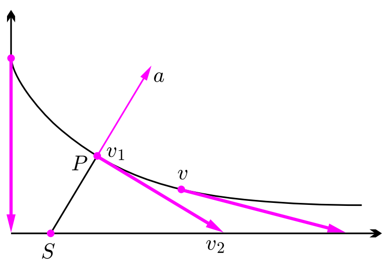
Rys. 4

Zbadamy najpierw, jak rozumieć tę receptę na przykładzie sfery o promieniu R. Sfera powstaje z obrotu półokręgu (rys. 4). Południkiem jest tutaj półokrąg o promieniu R, czyli krzywa o krzywiźnie $\frac{1}{R}$. Natomiast płaszczyzna prostopadła do tego półokręgu zawiera wektor normalny sfery, czyli przechodzi zawsze przez środek S sfery, zatem tnie sferę również wzdłuż okręgu wielkiego. Zatem ta druga krzywa również ma krzywiznę $\frac{1}{R}$. Półokrąg jest wykresem funkcji wklęsłej, więc nie będziemy zmieniać znaku. W rezultacie krzywizna powierzchni jest równa iloczynowi krzywizn dwóch rozważanych krzywych, czyli wynosi $\frac{1}{R} \cdot \frac{1}{R} = \frac{1}{R^2}$. Zatem nowa recepta daje wynik zgodny z twierdzeniem Gaussa–Bonneta.



Rys. 5

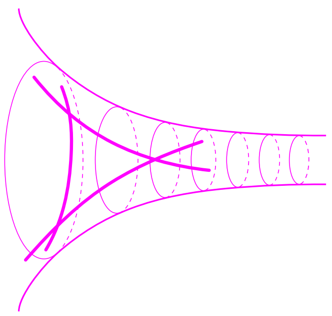
Skorzystajmy teraz z tego przepisu, żeby obliczyć krzywiznę pseudosfery. Ustalmy punkt P pseudosfery. Na początek zbadajmy krzywą powstałą z cięcia pseudosfery płaszczyzną prostopadłą do południka przechodzącą przez punkt P (rys. 5). Posłużymy się tutaj małym oszustwem. Mianowicie przypomnijmy, że w przypadku obliczania wartości krzywizny tej krzywej dla sfery, otrzymaliśmy wartość $\frac{1}{R}$, gdzie R było odległością między punktem P, a punktem S będącym przecięciem osi x z kierunkiem wektora normalnego w punkcie P. Okazuje się, że w ogólności pewien okrąg o środku w punkcie S i promieniu R dobrze przybliża rozważaną krzywą i ma taką samą krzywiznę w punkcie P. Zatem zawsze rozważane cięcie ma krzywiznę w punkcie P równą wartości $\frac{1}{|PS|}$.



Rys. 6

Teraz obliczmy krzywiznę południka, czyli krzywiznę traktrysy. Jak pamiętamy, musimy obliczyć przyspieszenie łódki ciągniętej przez marynarza, przy założeniu, że prędkość łódki stała i wynosi 1. W każdym punkcie krzywej narysujmy wektory prędkości v łódki (rys. 6). Zgodnie z definicją traktrysy, końce tych wektorów będą zawsze leżały na osi x! Wykorzystamy później to spostrzeżenie! Mamy obliczyć przyspieszenie a, które jest równe zmianie wektora prędkości w czasie, czyli $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$. Oznaczmy przez $v_1(t), v_2(t)$ odpowiednio początki i końce wektorów prędkości. Wtedy $-a = -\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t}$. Zauważmy, że skoro v_1 porusza się po traktrysie, to $\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} = v$. Natomiast v_2 zawsze należy do osi x, zatem $\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t}$ jest wektorem poziomym. Dodatkowo wiadomo, że w przypadku ruchu o jednostajnej prędkości przyspieszenie jest skierowane prostopadle do kierunku ruchu, więc jeśli początek wektora $-a$ umieścimy w punkcie P, to jego koniec musi się znajdować na prostej PS. Jednocześnie ten koniec musi się znajdować na osi x, gdyż koniec wektora $\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t}$ leży na osi x, a jego modyfikacja o $-\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t}$ jest wektorem poziomym. Zatem koniec wektora $-a$ jest punktem przecięcia prostej PS z osią x, czyli punktem S. Wobec tego krzywizna traktrysy w punkcie P wynosi $|-a| = |PS|$.

Na koniec, zgodnie z receptą, powinniśmy pomnożyć krzywizny południka i krzywej powstałej z cięcia płaszczyzną prostopadłą do południka oraz dodać znak minus z uwagi na wypukłość funkcji, której wykresem jest traktrysa. Zatem krzywizna pseudosfery wynosi $-\frac{1}{|PS|}|PS| = -1$. Czyli jest stała, nie zależy od punktu P, mimo, iż wydaje się, że pseudosfera w każdym swoim punkcie wygląda nieco inaczej! Ale to tylko jest wrażenie obserwatora zewnętrznego. Mrówki żyjące na pseudosferze nie mają szansy tego (lokalnie) dostrzec. Nazwa pseudosfery wzięła się właśnie z tego (dosyć przyszywanego) podobieństwa do sfery – funkcja krzywizny jest na niej również stała.



Rys. 7

Teraz możemy sformułować bardzo prosto twierdzenie Gaussa–Bonneta na pseudosferze. Tym razem krzywizna jest ujemna, więc trójkąty geodezyjne będą „chude” (rys. 7). Różnica między wartością π a sumą miar kątów wewnętrznych każdego trójkąta geodezyjnego będzie miarą powierzchni tego trójkąta. (Bowiem całka funkcji stałej równej 1 po dowolnej powierzchni jest miarą tej powierzchni.)

Ciekawym warto zdradzić, że pseudosfera jest lokalnie modelem tzw. geometrii hiperbolicznej. Ale o tym innym razem.