Klasy charakterystyczne

Zadania domowe (seria IX)

Zadanie 1. Niech ξ będzie zorientowaną wiązką rzeczywistą wymiaru n. Wykaż, że istnieje *ciąg dokładny Gysina*

$$\ldots \longrightarrow H^i(B) \xrightarrow{\cup e} H^{i+n}(B) \xrightarrow{\pi_0^*} H^{i+n}(E_0) \longrightarrow H^{i+1}(B) \longrightarrow \ldots$$

gdzie e oznacza klasę Eulera $e(\xi)$, $E_0 = E_0(\xi)$ jest przestrzenią totalną wiązki ξ z usuniętym cięciem zerowym, a π_0 jest rzutem na B. Wskazówka: Ciąg dokładny pary (E, E_0) oraz izomorfizm Thoma.

Definicja. Rozważmy następujące przekształcenie $f\colon E_0 \to \widetilde{G}_{n-1}$, gdzie $E_0 = E_0(\widetilde{\gamma}^n(\mathbb{R}^\infty))$. Weźmy $(X, v) \in E_0$, gdzie X jest zorientowaną przestrzenią liniową wymiaru n w $\mathbb{R}^\infty$, a $0 \neq v \in X$. Definiujemy $f\Big((X, v)\Big) = X \cap v^\perp$ z odpowiednią orientacją. Niech $f_N\colon E_0(\widetilde{\gamma}^n(\mathbb{R}^N)) \to \widetilde{G}_{n-1}(\mathbb{R}^N)$ będzie ograniczeniem f do $E_0(\widetilde{\gamma}^n(\mathbb{R}^N)) \subset E_0$.

Zadanie 2. Wykaż, że f_N można traktować jak rzutowanie w wiązce nad $\widetilde{G}_{n-1}(\mathbb{R}^N)$, której włóknem nad $Y \in \widetilde{G}_{n-1}(\mathbb{R}^N)$ jest ortogonalne dopełnienie Y w $\mathbb{R}^N$. Stosując ciąg Gysina do tej wiązki wykaż, że f_N indukuje izomorfizm na pierścieniach kohomologii w wymiarach $< N - n$. Wywnioskuj, że f indukuje izomorfizm na pierścieniach kohomologii.

Zadanie 3. Wykaż, że istnieje ciąg dokładny

$$\ldots \longrightarrow H^i(\widetilde{G}_n) \xrightarrow{\cup e} H^{i+n}(\widetilde{G}_n) \xrightarrow{\lambda} H^{i+n}(\widetilde{G}_{n-1}) \longrightarrow H^{i+1}(\widetilde{G}_n) \longrightarrow \ldots$$

gdzie e oznacza klasę Eulera $e(\widetilde{\gamma}^n)$, a λ jest homomorfizmem pierścieni przekształcającym klasy Pontryagina $\widetilde{\gamma}^n$ na klasy Pontryagina $\widetilde{\gamma}^{n-1}$.

Zadanie 4. Wykaż, że jeśli Λ jest dziedziną całkowitości zawierającą $\frac{1}{2}$, to pierścień kohomologii $H^*(\widetilde{G}_{2m+1}; \Lambda)$ jest pierścieniem wielomianów nad Λ generowanym przez klasy Pontryagina $p_1(\widetilde{\gamma}^{2m+1}), \ldots, p_m(\widetilde{\gamma}^{2m+1})$. Podobnie $H^*(\widetilde{G}_{2m}; \Lambda)$ jest pierścieniem wielomianów nad Λ generowanym przez klasy Pontryagina $p_1(\widetilde{\gamma}^{2m}), \ldots, p_{m-1}(\widetilde{\gamma}^{2m})$ oraz $e(\widetilde{\gamma}^{2m})$. Wskazówka: indukcja względem n. Łatwiejszy jest krok indukcyjny między $2m - 1$ i $2m$.