Klasy charakterystyczne

Zadania domowe (seria VIII)

Definicja. Niech ξ będzie rzeczywistą wiązką wektorową nad B, a $\xi\otimes\mathbb{C}$ jej kompleksyfikacją. *Klasą Pontryagina* $p_i(\xi)$ nazywamy klasę $(-1)^i c_{2i}(\xi\otimes\mathbb{C}) \in H^{4i}(B,\mathbb{Z})$. *Totalną klasą Pontryagina* $p(\xi)$ w pierścieniu $H^*(B,\mathbb{Z})$ nazywamy sumę $1 + p_1(\xi) + \ldots + p_{[\frac{n}{2}]}(\xi)$.

Zadanie 1. Wykaż, że $\xi \otimes \mathbb{C}$ jest izomorficzna nad $\mathbb{C}$ swojej wiązce sprzężonej $\overline{\xi \otimes \mathbb{C}}$(w której mnożenie przez i zastępujemy mnożeniem przez $-i$).

Zadanie 2. Wykaż, że $2c_{2i+1}(\xi \otimes \mathbb{C}) = 0$ dla każdego i.

Zadanie 3. Wykaż, że $2p(\xi \oplus \eta) - p(\xi)p(\eta)) = 0$.

Zadanie 4. Dla wiązki zespolonej ω wymiaru n oznaczamy przez $\omega_{\mathbb{R}}$ wiązkę rzeczywistą wymiaru $2n$ otrzymaną z ω przez zapominanie struktury zespolonej. Wykaż, że $\omega_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$ jest izomorficzna z $\omega \oplus \overline{\omega}$.

Zadanie 5. Znając klasy Cherna wiązki zespolonej ω, wyznacz klasy Pontryagina wiązki rzeczywistej $\omega_{\mathbb{R}}$.

Zadanie 6. Wyznacz klasy Pontryagina wiązki stycznej do $\mathbb{C}P^n$.

Zadanie 7. Niech ξ będzie zorientowaną wiązką rzeczywistą wymiaru $2k$. Wykaż, że $p_k(\xi) = e(\xi)^2$.

Definicja. Niech M będzie zwartą gładką zorientowaną rozmaitością wymiaru $4n$. Dla dowolnego podziału $I = i_1, \ldots, i_r$ liczby n, *I–tą liczbą Pontryagina* rozmaitości M nazywamy liczbę całkowitą

$$\langle p_{i_1}(\tau) \ldots p_{i_r}(\tau), [M] \rangle,$$

gdzie τ oznacza wiązkę styczną do M, a $[M]$ klasę fundamentalną M.

Zadanie 8. Oblicz liczby Pontryagina rozmaitości $\mathbb{C}P^{2n}$.

Zadanie 9. Wykaż, że jeśli którąś liczba Pontryagina rozmaitości M^{4n} jest niezerowa, to M^{4n} nie posiada dyfeomorfzimu zmieniającego orientację.

Zadanie 10. Wykaż, że jeśli którąś liczba Pontryagina rozmaitości M^{4n} jest niezerowa, to M^{4n} nie jest brzegiem zwartej orientowalnej rozmaitości wymiaru $4n + 1$.

Definicja. Oznaczmy przez $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ jednorodne funkcje symetryczne zmiennych $t_1, \ldots, t_n$ spełniające

$$1 + \sigma_1 + \ldots + \sigma_n = (1 + t_1)(1 + t_2) \ldots (1 + t_n).$$

Dwa jednomiany zmiennych $t_1, \ldots, t_n$ nazywamy *równoważnymi*, jeśli pewna permutacja zmiennych $t_1, \ldots, t_n$ przekształca jeden na drugi. Niech $\sum t_1^{a_1} \ldots t_r^{a_r}$ będzie sumą po wszystkich jednomianach zmiennych $t_1, \ldots, t_n$ równoważnych z $t_1^{a_1} \ldots t_r^{a_r}$ (w szczególności $\sigma_k = \sum t_1 \ldots t_k$). Dla podziału $I = i_1, \ldots, i_r$ liczby k definiujemy wielomian s_I od k zmiennych jako jedyny spełniający formułę

$$s_I(\sigma_1, \ldots, \sigma_k) = \sum t_1^{i_1} \ldots t_r^{i_r}.$$

Zadanie 11. Wykaż, że ta definicja jest poprawna i że nie zależy od n.

Zadanie 12. Wykaż, że klasy $s_I(c_1, \ldots, c_k)$ stanowią bazę $H^{2k}(G_n(\mathbb{C}^\infty); \mathbb{Z})$ (będziemy te klasy w skrócie oznaczać $s_I(c)$).

Zadanie 13. Wykaż, że

$$s_I(c(\omega \oplus \omega')) = \sum_{JK=I} s_J(c(\omega)) s_K(c(\omega')).$$

Zadanie 14. Dla zwartej rozmaitości zespolonej K^n i rozbicia I liczby n oznaczamy przez $s_I(c)[K^n]$, lub jeszcze zwięźlej przez $s_I[K^n]$ liczbę całkowitą $\langle s_I(c(\tau)), [K^n] \rangle$. Wykaż, że

$$s_I[K^n \times L^m] = \sum_{I_1 I_2 = I} s_{I_1}[K^n] s_{I_2}[L^m],$$

gdzie sumowanie odbywa się po wszystkich rozbiciach I_1 liczby n i rozbiciach I_2 liczby m, które łącznie stanowią rozbicie I.

Zadanie 15. Wykaż, że dla każdego produktu $K^n \times L^m$ zespolonych rozmaitości niezerowych wymiarów m, n, zachodzi $s_{m+n}[K^n \times L^m] \neq 0$.

Zadanie 16. Oblicz $s_n(\mathbb{C}P^n)$.

Zadanie 17. Niech K^n będą rozmaitościami zespolonymi dla których zachodzi $s_k(c)[K^k] \neq 0$. Wykaż, że macierz kwadratowa

$$\left(c_{i_1} \ldots c_{i_r}[K^{j_1} \times \ldots \times K^{j_s}]\right),$$

gdzie $i_1, \ldots, i_r$ oraz $j_1, \ldots, j_s$ przebiegają wszystkie podziały liczny n, jest nieosobliwa.

Zadanie 18. Wykaż że jeśli M^{4k} są rozmaitościami zorientowanymi dla których zachodzi $s_k(p)[M^{4k}] \neq 0$ (gdzie $s_I(p)$ są zdefiniowane tak samo jak $s_I(c)$), to macierz

$$\left(p_{i_1} \ldots p_{i_r}[M^{4j_1} \times \ldots \times M^{4j_s}]\right)$$

jest nieosobliwa.