Klasy charakterystyczne

Zadania domowe (seria VII)

Zadanie 1. Używając ciągu spektralnego Serre'a oblicz grupy homologii i pierścień kohomologii $\mathbb{C}P^\infty = K(\mathbb{Z}, 2)$. Wskazówka: $K(\mathbb{Z}, 1) \to P \to K(\mathbb{Z}, 2)$.

Zadanie 2. Oblicz grupy homologii i pierścień kohomologii przestrzeni ΩS^n.

Zadanie 3. Uzasadnij, że krótkiemu ciągowi dokładnemu grup $A \to B \to C$ odpowiada rozwłóknienie $K(A, 1) \to K(B, 1) \to K(C, 1)$. Wykaż, że dla obrazu A leżącego w centrum B można stosować ciąg spektralny Serre'a, tzn. $\pi_1(K(C, 1))$ działa trywialnie na $H_*(K(A, 1); G)$. Oblicz wszystkie różniczki na drugiej tablicy dla ciągu $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_2$ ($G = \mathbb{Z}$).

Zadanie 4. Oblicz grupy homologii i pierścień kohomologii homotopijnego włókna odwzorowania $S^k \to S^k$ stopnia n.

Zadanie 5. Niech X będzie wiązką $S^2 \to X \to S^2$ zdefiniowaną w następujący sposób: Niech $h\colon S^3 \to S^2$ będzie odwzorowaniem Hopfa. Definiujemy $X = I \times S^3/\sim$, gdzie $(t, x) \sim (s, y)$ jeśli $t = s = 0$ lub $t = s = 1$ oraz $h(x) = h(y)$. Odwzorowanie $X \to S^2$ definiujemy przez $(t, x) \to h(x)$. Wykaż, że struktura pierścienia ostatniej tablicy ciągu spektralnego Serre'a nie pokrywa się ze strukturą pierścienia $H^*(X, \mathbb{Z})$. Wskazówka: Znajdź odwzorowanie $X \to \mathbb{C}P^2$ świadczące o tym, że w $H^2(X, \mathbb{Z})$ istnieje element, którego kwadrat jest generatorem $H^4(X, \mathbb{Z})$.