Klasy charakterystyczne

Zadania domowe (seria IV)

Definicja. *Symbolem Schuberta* $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ nazywamy ciąg liczb całkowitych spełniających

$$1 \leqslant \sigma_1 < \sigma_2 < \ldots < \sigma_n \leqslant m.$$

Dla każdego symbolu Schuberta σ, oznaczamy przez $e(\sigma) \subset G_n(\mathbb{R}^m)$ zbiór wszystkich przestrzeni liniowych X wymiaru n takich, że

$$\dim(X \cap \mathbb{R}^{\sigma_i}) = i, \ \dim(X \cap \mathbb{R}^{\sigma_i - 1}) = i - 1$$

dla $i = 1, \ldots, n$.

Zadanie 1. Wykaż, że każdy punkt $X \in G_n(\mathbb{R}^m)$ należy do dokładnie jednego ze zbiorów $e(\sigma)$.

Zadanie 2. Wykaż, że $X \in e(\sigma)$ wtw kiedy X posiada bazę $x_1, \ldots, x_n$ taką, że

$$x_1 \in H^{\sigma_1}, \ldots, x_n \in H^{\sigma_n},$$

gdzie $H^k \subset \mathbb{R}^k$ oznacza otwartą półprzestrzeń postaci $(\xi_1, \ldots, \xi_k, 0, \ldots, 0)$ dla $\xi_k > 0$.

Zadanie 3. Wykaż, że każda przestrzeń liniowa $X \in e(\sigma)$ posiada jedyną bazę ortonormalną $(x_1, \ldots, x_n)$ należącą do $H^{\sigma_1} \times \ldots \times H^{\sigma_n}$.

Definicja. Niech $e'(\sigma) = V_n^0(\mathbb{R}^m) \cap (H^{\sigma_1} \times \ldots \times H^{\sigma_n})$ oznacza zbiór wszystkich ortonormalnych reperów $(x_1, \ldots, x_n)$ takich, że $x_i \in H^{\sigma_i}$. Niech $\overline{e}'(\sigma)$ oznacza zbiór ortonormalnych reperów $(x_1, \ldots, x_n)$ takich, że $x_i \in \overline{H}^{\sigma_i}$.

Zadanie 4. Wykaż, że zbiór $\overline{e}'(\sigma)$ jest homeomorficzny z domkniętą komórką wymiaru $(\sigma_1 - 1) + (\sigma_2 - 2) + \ldots + (\sigma_n - n)$. Ponadto $q\colon V_n^0(\mathbb{R}^m) \to G_n(\mathbb{R}^m)$ przeprowadza $e'(\sigma)$, wnętrze $\overline{e}'(\sigma)$, homeomorficznie na $e(\sigma)$.

Wskazówka. Niech $T(u, v)$ oznacza jedyny obrót w $\mathbb{R}^m$, który przekształca u na v i trzyma przestrzeń ortogonalną do u i v. Niech $b_i \in H^{\sigma_i}$ oznacza wektor o σ_i–tej współrzędnej równej 1, a pozostałych współrzędnych zerowych. Dla dowolnego reperu $(x_1, \ldots, x_n) \in \overline{e}'(\sigma)$ rozważmy izometrię

$$T = T(b_n, x_n) \circ T(b_{n-1}, x_{n-1}) \circ \ldots \circ T(b_1, x_1)$$

przestrzeni $\mathbb{R}^m$. Niech D oznacza zbiór wszystkich wektorów jednostkowych $u \in \overline{H}^{\sigma_{n+1}}$ ortogonalnych do $b_1, \ldots, b_n$. Wykaż, że $f\colon \overline{e}'(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \times D \to \overline{e}'(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n+1})$ zdefniowane formułą

$$f((x_1, \ldots, x_n), u) = (x_1, \ldots, x_n, Tu)$$

jest homeomorfizmem.

Zadanie 5. Wykaż, że $e(\sigma)$ nadają strukturę CW–kompleksu przestrzeni $G_n(\mathbb{R}^m)$. Podobnie, biorąc granicę prostą, otrzymujemy strukturę CW–kompleksu na $G_n(\mathbb{R}^\infty)$.

Zadanie 6. Wykaż, że liczba komórek wymiaru r w $G_n(\mathbb{R}^m)$ jest równa liczbie podziałów liczby r na co najwyżej n składników nie większych niż $m - n$.

Zadanie 7. Wykaż, że homomorfizm $i^*\colon H^p(G_n(\mathbb{R}^\infty)) \to H^p(G_n(\mathbb{R}^{n+k}))$ indukowany przez włożenie jest izomorfizmem dla $p < k$ (współczynniki dowolne).

Zadanie 8. Wykaż, że przyporządkowanie $f(X) = \mathbb{R}^1 \oplus X$ definiuje włożenie $G_n(\mathbb{R}^m)$ w $G_{n+1}(\mathbb{R}^1 \oplus \mathbb{R}^m) = G_{n+1}(\mathbb{R}^{m+1})$, oraz że f jest nakryte odwzorowaniem wiązek

$$\varepsilon^1 \oplus \gamma^n(\mathbb{R}^m) \to \gamma^{n+1}(\mathbb{R}^{m+1}).$$

Wykaż, że f przekształca r–komórkę w $G_n(\mathbb{R}^m)$ odpowiadającą podziałowi $i_1 \dots i_s$ na r–komórkę w $G_{n+1}(\mathbb{R}^{m+1})$ odpowiadającą temu samemu podziałowi $i_1 \dots i_s$.

Zadanie 9. Wykaż, że liczba różnych liczb Stiefela–Whitneya $w_1^{r_1} \dots w_n^{r_n}$ rozmaitości wymiaru n jest równa liczbie podziałów liczby n.

Zadanie 10. Wykaż, że $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ i $G_k(\mathbb{R}^{n+k})$ są izomorficzne jako CW–kompleksy.

Zadanie 11. Wylicz klasy Stiefela–Whitneya $\xi = \gamma^1 \times \ldots \times \gamma^1$ (n czynników).

Zadanie 12. Wykaż, że w $H^*(\mathbb{R}P^\infty \times \ldots \times \mathbb{R}P^\infty)$ (n czynników) klasy $w_1(\xi), w_2(\xi), \ldots, w_n(\xi)$ są algebraicznie niezależne.

Zadanie 13. Wykaż, że w $G_n(\mathbb{R}^\infty)$ klasy $w_1(\gamma^n), \ldots, w_n(\gamma^n)$ są algebraicznie niezależne.

Zadanie 14. Wykaż, że $H^*(G_n(\mathbb{R}^\infty); \mathbb{Z}/2)$ jest algebrą wielomianów nad $\mathbb{Z}/2$ generowaną w sposób wolny przez $w_1(\gamma^n), \ldots, w_n(\gamma^n)$.

Zadanie 15. Zidentyfikuj kocykl w $C^r(G_n(\mathbb{R}^\infty))$ odpowiadający $w_r(\gamma^n)$ (wskazówka: zad.8).

Zadanie 16. Wykaż, że algebra $H^*(G_n(\mathbb{R}^{n+k}))$ nad $\mathbb{Z}/2$ jest generowana przez klasy $w_1, \ldots, w_n$ wiązki γ^n oraz klasy dualne $\overline{w}_1, \ldots, \overline{w}_n$, z $n+k$ relacjami definiującymi

$$(1 + w_1 + \ldots + w_n)(1 + \overline{w}_1 + \ldots + \overline{w}_k) = 1$$

(wskazówka: zad.8).

Zadanie 17. Wykaż, że

$$w(\xi^m \otimes \eta^n) = p_{m,n}(w_1(\xi^m), \ldots, w_m(\xi^m), w_1(\eta^n), \ldots, w_n(\eta^n)),$$

gdzie $p_{m,n}$ można zcharakteryzować, oznaczając przez $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ oraz $\sigma'_1, \ldots \sigma'_m$ elementarne funkcje symetryczne od zmiennych $t_1, \ldots, t_m$ oraz $t'_1, \ldots, t'_n$ odpowiednio, formułą

$$p_{m,n}(\sigma_1, \ldots, \sigma_m, \sigma'_1, \ldots, \sigma'_m) = \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} (1 + t_i + t'_j).$$