# Klasy charakterystyczne

## Zadania domowe (seria I)

**Zadanie 1.** Wykaż, że sfera jednostkowa $S^n$ dopuszcza niezerujące się pole wektorowe dla nieparzystego $n$. Wykaż, że wiązka normalna $S^n \subset \mathbb{R}^n$ jest trywialna dla wszystkich $n$.

**Zadanie 2.** Wykaż, że wiązka $TS^n \oplus \epsilon^1$ jest wiązką trywialną (gdzie $\epsilon^1$ jest trywialną wiązką wektorową jednowymiarową).

**Zadanie 3.** Wykaż, że że jeśli $S^n$ dopuszcza niezerujące się pole wektorowe, to identyczność na $S^n$ jest homotopijna z antypodyzmem. Wykaż, że dla $n$ parzystych antypodyzm jest homotopijny odbiciu

$$r(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (-x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$$

i wobec tego ma stopień $-1$. Wywnioskuj, że $S^n$ nie jest paralelizowalna dla $n$ parzystych, $n \geqslant 2$.

**Zadanie 4.** Niech $\mu, \mu'$ będą dwoma różnymi metrykami Euklidesowymi (tzn. ciągłymi polami iloczynów skalarnych) na tej samej wiązce wektorowej $\xi$. Wykaż, że istnieje homeomorfizm $f\colon E(\xi) \to E(\xi)$, który przekształca każde włókno na siebie tak, że złożenie $\mu \circ f\colon E(\xi) \to \mathbb{R}$ jest równe $\mu'$.

**Zadanie 5.** Wykaż, że jądro suriekcji wiązek wektorowych jest wiązką wektorową.

**Zadanie 6.** Dla submersji $f\colon M \to N$ oznaczmy przez $\kappa_f$ wiązkę nad $M$ której włóknem nad $x \in M$ jest jądro różniczki $D_x f$ (z topologią dziedziczoną z $TM$). Wykaż, że jeśli $M$ jest rozmaitością Riemannowską, to

$$TM \cong \kappa_f \oplus f_* TN.$$

**Zadanie 7.** Wykaz, że wiązka $\xi$ dopuszczająca metrykę Euklidesową jest izomorficzna swojej wiązce dualnej $\mathrm{Hom}(\xi, \epsilon^1)$.

**Zadanie 8.** Niech $B$ będzie przestrzenią w której punkty od zbiorów domkniętych możemy oddzielać funkcjami ciągłymi rzeczywistymi. Oznaczmy przez $\mathbb{R}(B)$ pierścień funkcji ciagłych rzeczywistych na $B$. Dla wiązki wektorowej $\xi$ nad $B$ przez $S(\xi)$ oznaczamy $\mathbb{R}(B)$–moduł cięć wiązki $\xi$.
(a) Wykaż, że $S(\xi \oplus \eta) \cong S(\xi) \oplus S(\eta)$. Wykaż, że $\xi$ jest trywialna wtw kiedy $S(\xi)$ jest wolny.
(b) Wykaż, że jeśli $\xi \oplus \eta$ jest trywialna, to $S(\xi)$ jest skończenie generowanym modułem projektywnym. Na odwrót, jeśli $Q$ jest skończenie generowanym modułem projektywnym nad $\mathbb{R}(B)$, to $Q \cong S(\xi)$ dla pewnej wiązki $\xi$.
(c) Wykaż, że $\xi \cong \eta$ wtw $S(\xi) \cong S(\eta)$.