

Geometryczna teoria grup
zadania przygotowawcze do drugiego kolokwium

Zadanie 1. Niech X będzie geodezyjną przestrzenią metryczną spełniającą warunek

$$|xy| + |wz| \leq \max\{|xz| + |yw|, |xw| + |yz|\} + \delta.$$

Znajdź δ' dla której X spełnia warunek δ' -cienkich trójkątów.

Zadanie 2. Niech X będzie geodezyjną przestrzenią metryczną spełniającą warunek δ -cienkich trójkątów. Niech d oznacza odległość punktu x od pewnej geodezyjnej yz . Wykaż

$$d - \delta \leq (y|z)_x \leq d.$$

Zadanie 3 (*). Wykaż, że przestrzeń geodezyjna z nieliniową funkcją rozbieżności jest hiperboliczna.

Zadanie 4 (Twierdzenie Papasoglu)**. Załóżmy, że $Cay(G, S)$ spełnia warunek δ -cienkich bigonów. Wykaż, że G jest hiperboliczna.

Zadanie 5. Niech X będzie ograniczoną przestrzenią metryczną. Wykaż, że X jest quasi-izometryczna z Y wtedy i tylko wtedy kiedy Y jest ograniczona.

Zadanie 6. Mamy ciąg dokładny

$$0 \rightarrow F_1 \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow F_2 \rightarrow 0,$$

gdzie F_1, F_2 są skończone. Wykaż, że G i H są quasi-izometryczne.

Zadanie 7. Wykaż, że grupy podstawowe wszystkich zamkniętych powierzchni genusu co najmniej 2 są quasi-izometryczne.

Zadanie 8. Niech X będzie drzewem o wierzchołkach stopnia nieograniczonego z góry i ograniczonego z dołu przez 3. Wykaż, że X nie jest quasi-izometryczne z drzewem o wszystkich wierzchołkach stopnia 3.

Zadanie 9 (*). Wykaż, że grupa hiperboliczna posiada tylko skończenie wiele klas sprzężoności skończonych podgrup.

Zadanie 10. Niech

$$0 \rightarrow N \rightarrow G \rightarrow B \rightarrow 0$$

będzie krótkim ciągiem dokładnym nieskończonych grup, gdzie G jest hiperboliczna. Wykaż, że włożenie $N \rightarrow G$ nie jest quasi-izometrycznym włożeniem.

Zadanie 11. Zidentyfikuj, korzystając z definicji, typ topologiczny brzegu Gromowa

- (i) drzewa o wierzchołkach stopnia 3,
- (ii) płaszczyzny hiperbolicznej.

Zadanie 12. Niech X będzie właściwą przestrzenią hiperboliczną. Wykaż, że dla każdej pary punktów $a \neq b \in \partial X$ istnieje geodezyjna o końcach a, b .

Zadanie 13. Znajdź przestrzeń hiperboliczną X i punkty $x_0 \in X, \xi \in \partial X$ takie, że ξ nie ma reprezentanta postaci (x_i) spełniającego $|x_k x_l| = |k - l|$.

Zadanie 14. Niech g będzie elementem nieskończonego rzędu w grupie hiperbolicznej G , a $a, b \in \partial G$ końcami quasi-geodezyjnej $(g^n)_n$. Wykaż, że dla każdej pary otoczeń $a \in U \setminus \{b\} \subset \partial G$ oraz $b \in V \setminus \{a\} \subset \partial G$ istnieje n spełniające $g^n(\partial G \setminus V) \subset U$.

Zadanie 15. Niech X będzie przestrzenią hiperboliczną, niekoniecznie właściwą. Wykaż, że ∂X z metryką Gromowa jest przestrzenią metryczną zupełną.

Zadanie 16. Znajdź wzrost grup

- (i) grupy izometrii $\mathbf{R}^2$ zachowującej $\mathbf{Z}^2$
- (ii) $\mathbf{Z}_2 * \mathbf{Z}_3$,
- (iii) $\langle s_1, s_2, t_1, t_2, r \mid [s_i, r] = [t_i, r] = 1, [s_i, t_j] = \delta_{ij}r \rangle$,
- (iv) $\langle s, t, r \mid [s, r] = 1, t^{-1}st = s^2r, t^{-1}rt = sr \rangle$,
- (v) grupy hiperbolicznej.

Zadanie 17. Niech X będzie przestrzenią hiperboliczną. Znajdź naturalne odwzorowanie $\partial X \rightarrow \text{Ends}(X)$ i wykaż, że jest ciągłe.

Zadanie 18. Znajdź $\text{Ends}(X)$ dla X jak na rysunkach.