Geometryczna teoria grup, lista 5

Zadanie 1. Zrealizuj grupę

$$\langle p, r, s, t \mid prst = pr^{-1}s^{-1}t^{-1} = 1 \rangle$$

jako podgrupę grupy izometrii $\mathbf{H}^2$. Wykaż, że algorytm Dehna zawodzi dla tej prezentacji.

Zadanie 2. Zrealizuj grupę

$$\langle r, s, t \mid r^2s^2t^2 = 1 \rangle$$

jako podgrupę grupy izometrii $\mathbf{H}^2$. Wykaż, że algorytm Dehna działa poprawnie dla tej prezentacji (nie korzystając z twierdzenia o grupach małych skreśleń).

Zadanie 3. Uzasadnij, że grupy w Zadaniach 1 i 2 są izomorficzne.

Zadanie 4. Jakie możliwie najsilniejsze warunki małych skreśleń spełniają prezentacje

(i) $\langle a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \mid [a_1, a_2][b_1, b_2][c_1, c_2] = 1 \rangle$,

(ii) w Zadaniu 1,

(iii) w Zadaniu 2,

(iv) $\langle a, t \mid t^{-1}at = a^2 \rangle$,

(v) $\langle r, s, t \mid rst = tsr \rangle$,

(vi) $\langle s, t \mid s^2t^2 = ts \rangle$?

Zadanie 5. Wykaż, korzystając z twierdzenia o grupach małych skreśleń, że dla grupy o prezentacji

$$\langle a, b, c \mid bcbbabbcbbacbbcbcbcbbccaabacbba = bbcaccabbbcbbcabccbcabcacbcccbc = 1 \rangle$$

algorytm Dehna działa poprawnie.

Zadanie 6. Niech $K \subset S^3$ będzie węzłem alternującym, czyli takim, który posiada diagram w którym na przemian wzdłuż węzła występują mosty i tunele (overcrossings i undercrossings). Znajdź prezentację grupy podstawowej $S^3 \setminus K$, która spełnia warunki C(4) i T(4).