Geometryczna teoria grup, lista 3

Zadanie 1. Znajdź graf Cayleya grupy

(i) permutacji zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$ z generatorami $(1, 2), (2, 3), (3, 4)$,

(ii) Heisenberga $\langle s, t, r | [s, t] = [s, r] = 1,\ [t, r] = s\rangle$.

Zadanie 2. Znajdź grafy Cayleya grup

(i) $\langle s, t | s^3 = t^3 = (st)^3 = 1\rangle$,

(ii) $\langle s, t, r | s^2 = t^2 = r^2 = (st)^3 = (tr)^3 = (rs)^3 = 1\rangle$.

Zadanie 3. Wykaż, że grupa skończona nie może działać (nietrywialnie) na drzewie, tzn. ma własność (FA).

Zadanie 4. Wykaż, że jeśli F ma własność (FA) oraz jest podgrupą skończonego indeksu w G, to G ma własność (FA).

Zadanie 5. Wykaż, że jeśli co najmniej 3 poddrzewa pewnego drzewa przecinają się parami, to mają punkt wspólny.

Zadanie 6. Wykaż, że jeśli skończenie generowana grupa $G = \langle S\rangle$ działa na drzewie, oraz elementy s, st dla wszystkich $s, t \in S$ są eliptyczne (mają punkty stałe), to G działa trywialnie.

Zadanie 7. Wykaż, że grupy z Zadania 2 mają własność (FA), ale ich pewne podgrupy skończonego indeksu nie mają własności (FA).

Zadanie 8. Wykaż, że każda izometria g drzewa jest eliptyczna (tzn. ma punkt stały) lub hiperboliczna (tzn. punkty x o minimalnym przesunięciu $d(gx, x)$ leżą na izometrycznie zanurzonej prostej, zwanej osią).