Geometryczna teoria grup, lista $2\frac{1}{2}$

Zadanie 1. Przypuśćmy, że grupa G rozkłada się jako produkt wolny $A * B$. Jeśli $g = [g_1, g_2]$, dla $g_1, g_2 \in G$, jest nietrywialnym elementem A, to wtedy g_1 i g_2 należą do A.

Zadanie 2. Mówimy, że grupa jest *rezydualnie skończona* jeśli przecięcie jej podgrup skończonego indeksu jest trywialne. Wykaż, że skończenie generowana grupa rezydualnie skończona ma *własność Hopfa*, czyli każdy jej epimorfizm na siebie jest izomorfizmem (patrz Zadanie 5 z listy 2).

Zadanie 3. Jaka powinna być postać podgrup produktu wolnego z amalgamacją?

Zadanie 4 (Twierdzenie Higmana i Neumanna o zanurzeniu)**.** Wykaż, że każdą grupę przeliczalną G można zanurzyć w grupę o 2 generatorach. Wskazówki:

(i) Wykaż, że grupa $G_1 = G * \mathbf{Z}$ jest generowana przez pewne elementy nieskończonego rzędu $y_0, y_1, \ldots$

(ii) Niech $G_2 = \{G_1, t_0, t_1, \ldots | t_0^{-1} y_0 t_0 = y_1, \ldots\}$ będzie otrzymana z G_1 przez nieskończony ciąg HNN-rozszerzeń. Wykaż, że $\{t_i\}$ generują w G_2 grupę wolną.

(iii) Znajdź zanurzenie nieskończenie generowanej grupy wolnej F_∞ w grupę wolną o 2 generatorach, takie żeby jeden generator był wspólny. Wykaż, że odpowiedni produkt $G_3 = G_2 *_{F_\infty} F_2$ jest generowany przez trzy elementy, z których dwie pary generują grupy wolne.