Geometryczna teoria grup, lista 11

Zadanie 1. Wykaż, że ultragranica dowolnego ciągu przestrzeni metrycznych jest zupełna.

Zadanie 2. Wykaż, że ultragranica ciągu geodezyjnych przestrzeni metrycznych jest geodezyjna.

Zadanie 3. Znajdź stożek asymptotyczny grupy $\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z} = \langle s\rangle \oplus \langle t\rangle$ ze zbiorem generatorów $\{s, t, s+t\}$, dowolnym ciągiem skalującym i dowolnym ultrafiltrem.

Zadanie 4. Wykaż, że stożek asymptotyczny grupy hiperbolicznej w sensie Gromowa jest $\mathbf{R}$–drzewem.

Zadanie 5. Wykaż, że (L, C)–quasi-izometria grup indukuje L–bi-Lipschitzowskie odwzorowanie między odpowiednimi stożkami asymptotycznymi.

Zadanie 6. Oblicz wymiar Hausdorffa odcinka $[0, 1]$.

Zadanie 7. Oblicz wymiar Hausdorffa klasycznego zbioru Cantora $C \subset [0, 1]$ (otrzymanego przez kolejne usuwanie środkowych $\frac{1}{3}$ części pozostałych odcinków).

Zadanie 8. Niech G będzie skończenie generowaną grupą nilpotentną. Wykaż, że $[G, G] \subset G$ ma *wielomianową dystorsję*, i.e. istnieje taki wielomian P, że dla każdego $g \in [G, G]$ zachodzi

$$|g|_{[G,G]} \leqslant P(|g|_G).$$

Zadanie 9. Wykaż, że każda skończenie generowana grupa nilpotentna ma wzrost wielomianowy. Wskazówka: dowód indukcyjny ze względu na stopień nilpotentności oraz Zadanie 8.