

Geometryczna teoria grup, lista 10

Definicja. Niech S będzie skończonym zbiorem generatorów grupy G . *Funkcja wzrostu* $\beta_{G,S}: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ przypisuje liczbie n liczbę wierzchołków w grafie Cayleya $\text{Cay}(G, S)$ odległych o nie więcej niż n od identyczności.

Definicja. Piszemy $\beta \prec \alpha$, jeśli istnieją c_1, c_2 spełniające $\beta(n) \leq c_1 \alpha(c_2 n)$ dla dużych n . Mówimy, że funkcje β i α są równoważne, jeśli $\alpha \prec \beta$ oraz $\beta \prec \alpha$.

Zadanie 1. Przypuśćmy, że grafy Cayleya $\text{Cay}(G, S)$ i $\text{Cay}(G', S')$ są quasi-izometryczne. Wykaż, że wtedy $\beta_{G,S}$ oraz $\beta_{G',S'}$ są równoważne. W szczególności klasa równoważności wzrostu grupy nie zależy od wyboru zbioru generatorów. Tę klasę nazywamy *wzrostem* grupy G .

Zadanie 2. Znajdź wzrost grupy

- (i) $\mathbf{Z}^n$,
- (ii) wolnej o n generatorach,
- (iii) Heisenberga $\langle s, t, r \mid [s, t] = [s, r] = 1, [t, r] = s \rangle$,
- (iv) rozwiązalnej $\langle s, t, r \mid [s, r] = 1, t^{-1}st = s^2, t^{-1}r^2t = r \rangle$.

Definicja. Rodzinę zbiorów $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbf{N})$ nazywamy *filtrem*, jeśli spełnia warunki

- (i) $\emptyset \neq \mathcal{F}$,
- (ii) jeśli $A, B \in \mathcal{F}$, to $A \cap B \in \mathcal{F}$,
- (iii) jeśli $A \in \mathcal{F}$ oraz $B \supset A$, to $B \in \mathcal{F}$.

Ultrafiltrem nazywamy taki filtr, że dla każdego $A \in \mathcal{P}(\mathbf{N})$ mamy $A \in \mathcal{F}$ lub $A^c \in \mathcal{F}$.

Zadanie 3. Wykaż, że rodzina wszystkich podzbiorów $\mathbf{N}$ zawierających pewien ustalony element $a \in \mathbf{N}$ jest ultrafiltrem (taki ultrafiltr nazywamy *głównym*). Wykaż, że istnieje ultrafiltr, który nie jest główny.

Definicja. Niech ω będzie ultrafiltrem. Mówimy, że ciąg (x_n) liczb rzeczywistych *zbiega* do $x \in \mathbf{R}$ *względem* ω , jeśli spełnia dla każdego $\varepsilon > 0$

$$\{n \mid |x_n - x| \leq \varepsilon\} \in \omega.$$

Podobnie (x_n) *zbiega* do ∞ *względem* ω , jeśli spełnia dla każdego $R > 0$

$$\{n \mid x_n \geq R\} \in \omega.$$

Zadanie 4. Niech ω będzie ultrafiltrem. Wykaż, że każdy ograniczony ciąg liczb rzeczywistych ma granicę względem ω .

Zadanie 5. Niech ω będzie ultrafiltrem. Wykaż, że każdy ograniczony z dołu ciąg liczb rzeczywistych ma względem ω granicę skończoną lub nieskończoną.

Zadanie 6. Wykaż, że dla dowolnych ograniczonych ciągów liczb rzeczywistych $(x_n), (y_n)$ zachodzi

(i) $\lim_{\omega} x_n + \lim_{\omega} y_n = \lim_{\omega} (x_n + y_n),$

(ii) $\lim_{\omega} x_n \cdot \lim_{\omega} y_n = \lim_{\omega} (x_n \cdot y_n).$