Geometryczna teoria grup, lista 1.

Twierdzenie (Kuroš)**.** *Jeśli H jest podgrupą grupy $G_1 * G_2$, to przedstawia się jako produkt wolny grupy wolnej i podgrup sprzężeń G_i.*

Twierdzenie (Gruško)**.** *Niech F będzie skończenie generowaną grupą wolną. Załóżmy, że mamy epimorfizm $\phi\colon F \to G$, gdzie G rozkłada się jako $G = G_1 * G_2$. Wtedy istnieją podgrupy $F_1, F_2 \subset F$ spełniające $F = F_1 * F_2$ oraz $\phi(F_i) = G_i$.*

Zadanie 1. Niech $\mu(G)$ oznacza minimalną moc zbioru generatorów grupy G. Wykaż równość

$$\mu(G_1 * G_2) = \mu(G_1) + \mu(G_2).$$

Zadanie 2. Niech G będzie grupą skończenie generowaną. Wykaż że dla pewnego n mamy rozkład

$$G = G_1 * \ldots * G_n,$$

gdzie G_i są *nierozkładalne* (czyli nie dopuszczają przedstawienia w postaci $A * B$ dla nietrywialnych A i B).

Zadanie 3. Wykaż, że każda nierozkładalna podgrupa grupy $G_1 * G_2$ jest zawarta w pewnym sprzężeniu (w $G_1 * G_2$) grupy G_1 lub grupy G_2 albo jest nieskończona cykliczna (tzn. izomorficzna z $\mathbf{Z}$).

Zadanie 4. Jeśli mamy $G = G_1 * G_2$ oraz przecięcie $w^{-1}G_1 w \cap G_i$ jest nietrywialne dla pewnego $w \in G$, $i = 1, 2$, to wtedy zachodzi $i = 1$ oraz $w \in G_1$.

Zadanie 5 (twierdzenie o jednoznaczności rozkładu)**.** Niech G będzie grupą skończenie generowaną. Wtedy rozkład z zadania 2 jest jednoznaczny w następującym sensie. Przypuśćmy, że mamy $G = G_1 * \ldots * G_n = H_1 * \ldots * H_m$, gdzie G_i, H_j są nierozkładalne. Wtedy zachodzi $m = n$ i, po przenumerowaniu, G_i jest izomorficzne z H_i. Co więcej, dla każdego G_i nie izomorficznego z $\mathbf{Z}$, G_i jest sprzężona do H_i w G.