Geometryczna teoria grup
Kolokwium I poprawkowe, 6 września 2010

Zadanie 1. Niech A i B będą skończonymi grupami, a G podgrupą produktu wolnego $A * B$. Wykaż, że jeśli G jest beztorsyjna, to jest grupą wolną.

Zadanie 2. Narysuj graf Cayleya grupy $G = \langle s, t \mid s^6 = t^2 = (st)^3 = 1 \rangle$. Czy G ma własność (FA)?

Zadanie 3. Niech g będzie paraboliczną, a h hiperboliczną izometrią płaszczyzny hiperbolicznej o wspólnym punkcie stałym w nieskończoności. Wykaż, że $g \circ h$ jest hiperboliczna.

Zadanie 4. (i) Zrealizuj grupę o prezentacji

$$G = \langle s, t, r \mid s^2 = r^2 = t^2 = (sr)^2 = (rt)^3 = (st)^7 = 1 \rangle$$

jako podgrupę izometrii $\mathbf{H}^2$.

(ii) Oblicz pole powierzchni ilorazu $D = \mathbf{H}^2 / G$.

(iii) Niech P będzie jednospójnym wielokątem, będącym sumą kopii D, w odpowiednim parkietażu $\mathbf{H}^2$. Oszacuj liczbę kopii D w P przez liczbę krawędzi na obwodzie P.

Zadanie 5 (*nieobowiązkowe)**.** Podaj przykład nietrywialnego działania grupy na drzewie symplicjalnym przez eliptyczne izometrie.