Geometryczna teoria grup
Kolokwium I, 30 marca 2010

Zadanie 1. Wykaż, że beztorsyjna 2–generowana grupa przedstawiająca się nietrywialnie jako produkt wolny jest grupą wolną.

Rozwiązanie. Z Zadania 1 z listy 1 mamy $\mu(G_1 * G_2) = \mu(G_1) + \mu(G_2)$. Ponieważ G_i są nietrywialne, mamy $\mu(G_i) \geqslant 1$. W świetle $\mu(G_1 * G_2) = 2$ mamy równości $\mu(G_i) = 1$. Zatem G_i są cykliczne. Ponieważ G_i zanurzają się w G, są one beztorsyjne, czyli izomorficzne $\mathbf{Z}$.

Zadanie 2. Narysuj graf Cayleya grupy $G = \langle s, t \mid s^4 = t^2 = (st)^4 = 1 \rangle$. Czy G ma własność (FA)?

Rozwiązanie. Ponieważ t jest rzędu 2, z każdego wierzchołka wychodzą 3 krawędzie. Słowo s^4 jest trywialne w G, doklejamy kwadraty dla każdej warstwy $\langle s \rangle$ w G. Podobnie doklejamy ośmiokąty odpowiadające słowu $(st)^4$ dla każdej warstwy $\langle st \rangle$. Otrzymamy zanurzenie grafu Cayleya w $\mathbf{R}^2$, widoczne jako parkietaż kwadratami i ośmiokątami regularnymi takie, że w każdym wierzchołku schodzą się 2 ośmiokąty i jeden kwadrat. G ma własność (FA) z Zadania 6 z listy 3, bowiem s, t, st, ts są skończonego rzędu.

Zadanie 3. Niech T będzie drzewem symplicjalnym, a g i h hiperbolicznymi izometriami T. Wykaż, że jeśli osie g i h są rozłączne, to izometria $g \circ h$ jest również hiperboliczna.

Rozwiązanie. Niech x, y będą punktami na osiach g i h realizującymi odległość między tymi osiami. Niech γ oznacza geodezyjną yx. Oznaczmy przez α, β, odpowiednio, fragmenty $h^{-1}(y)y, xg(x)$ osi h i g. Wtedy konkatenacja $h^{-1}(\gamma)\alpha\gamma\beta g(\gamma)$ jest izometryczna z odcinkiem, a $g \circ h$ przekształca jego pierwszy segment na ostatni. Zatem orbita $\alpha\gamma\beta g(\gamma)$ pod działaniem $g \circ h$ jest niezmienniczą osią.

Zadanie 4. (i) Zrealizuj grupę o prezentacji

$$G = \langle s, t, r \mid s^2 = r^2 = t^2 = (sr)^2 = (rt)^4 = (st)^6 = 1 \rangle$$

jako podgrupę izometrii $\mathbf{H}^2$.

(ii) Oblicz pole powierzchni ilorazu $D = \mathbf{H}^2/G$.

(iii) Niech P będzie jednospójnym wielokątem, będącym sumą kopii D, w odpowiednim parkietażu $\mathbf{H}^2$. Oszacuj liczbę kopii D w P przez liczbę krawędzi na obwodzie P.

Rozwiązanie. (i) Dowodzimy, że w $\mathbf{H}^2$ można znaleźć trójkąt o kątach wewnętrznych $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$. Najpierw konstruujemy ośmiokąt regularny o kątach zewnętrznych $\frac{5\pi}{6}$: W modelu dyskowym rozważamy wszystkie ośmiokąty regularne o środku w środku dysku. Gdy wierzchołki takich ośmiokątów dążą do ∞, kąt zewnętrzny dąży do π. Gdy wierzchołki dążą do środka dysku, z twierdzenia G–B kąt zewnętrzny dąży do $\frac{\pi}{4}$. Zatem do konstrukcji szukanego ośmiokąta wystarczy zauważyć $\frac{\pi}{4} < \frac{5\pi}{6} < \pi$. Szukany trójkąt otrzymujemy łącząc środek znalezionego ośmiokąta z wierzchołkiem i środkiem sąsiedniego boku. G działa na $\mathbf{H}^2$ tak, że jej generatory działają przez odbicia w bokach znalezionego trójkąta.

(ii) Iloraz D jest izometryczny z trókątem z punktu (i). Z twierdzenia G–B pole powierzchni jest równe defektowi, czyli różnicy pomiędzy sumą katów zewnętrznych a 2π. Ta wielkość wynosi

$$\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) + \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) - 2\pi = \frac{\pi}{12}.$$

(iii) Z twierdzenia G–B mamy $A\frac{\pi}{12} = \sum_{\alpha \text{ zewn}} \alpha - 2\pi$, gdzie A oznacza liczbę kopii D w P. Liczba kątów zewnętrznych jest równa liczbie krawędzi Per na obwodzie P. Ponadto kąty zewnętrzne nie przekraczają $\frac{5}{6}\pi$. Zatem mamy

$$A \leqslant 10Per - 24.$$