Geometria Różniczkowa I

Zadania przygotowawcze do drugiego kolokwium

Zadanie 1. Zbadaj typy punktów (eliptyczne, ombiliki, paraboliczne i hiperboliczne) na powierzchni będącej wykresem funkcji
a) $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2y^2$,
b) $g(x, y) = xy^2 - x^2$
c) $h(x, y) = x^3 - 3xy^2$ (małpie siodło).

Zadanie 2. Sprawdź, że przekształcenie $p(u, v) = (\sin u \cos v,\ \sin u \sin v, u)$, gdzie $0 < u < \pi,\ v \in \mathbb{R}$, jest parametryzacją pewnej powierzchni. Wyznacz wszystkie jej ombiliki dwoma sposobami: z proporcjonalności obu form podstawowych i ze znikania wyróżnika w równaniu kwadratowym opisującym krzywizny główne.

Zadanie 3. Wykaż, że powierzchnia opisana równaniem $z = f(x, y)$ jest minimalna wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(1 + f_x^2)f_{yy} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_y^2)f_{xx} = 0.$$

Zadanie 4. Znajdź linie krzywiznowe i linie asymptotyczne na powierzchni o parametryzacji

$$p(u, v) = (u \cos v,\ u \sin v,\ 6 \ln u).$$

Zadanie 5. Które z podanych powierzchni są lokalnie izometrycznie wewnętrznie? Dlaczego?
a) sfera o promieniu 1,
b) sfera o promieniu 2,
c) pseudosfera,
d) stożek,
e) walec,
f) hiperboloida $z^2 = y^2 + x^2 - 1$,
g) półpłaszczyzna hiperboliczna,
h) płaszczyzna,
i) dysk Poincare, czyli $\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ z metryką $g_{11} = g_{22} = \frac{1}{(1-|x|^2)^2}$, $g_{12} = 0$,
j) płaszczyzna z metryką $g_{11} = g_{22} = \frac{1}{(1+|x|^2)^2}$, $g_{12} = 0$.

Zadanie 6. Na sferze o promieniu R dany jest okrąg o promieniu $r < R$. Wyznacz krzywiznę geodezyjną i krzywiznę normalną tego okręgu.

Zadanie 7. Oblicz symbole Christoffela na torusie — powierzchni obrotowej o parametryzacji

$$p(u, v) = \Big((2 + \cos v) \cos u,\ (2 + \cos v) \sin u,\ \sin v\Big).$$

Zadanie 8. Znajdź krzywiznę Gaussa powierzchni o metryce
a) $g_{11} = g_{22} = \lambda(u, v)$, $\quad g_{12} = 0$,
b) $g_{11} = g_{22} = 1$, $\quad g_{12} = \cos \omega(u, v)$,
c) $g_{11} = g_{22} = (u^2 + v^2 + 1)^{-2}$, $\quad g_{12} = 0$.

Zadanie 9. Dana jest powierzchnia z metryką

$$g_{11}(u, v) = 1, \quad g_{12}(u, v) = 0, \quad g_{22}(u, v) = 1 + u^2 + v^2.$$

Znajdź geodezyjną na tej powierzchni wychodzącą z punktu o współrzędnych $u = 1,\ v = 1$ w kierunku wektora $(1, 1)$.

Zadanie 10. Powierzchnia obrotowa S jest opisana równaniem

$$x^2 + y^2 + (\ln z)^2 = 1.$$

Dane są dwa wektory v i w styczne do S w punkcie $(0, 0, e)$, przy czym $|v| = |w|$. Wykaż, że istnieje taka ciągła, kawałkami gładka krzywa D na S, że przesunięcie równoległe wektora v wzdłuż D daje wektor w.

Zadanie 11. ($*$) Dane jest przekształcenie konforemne półpłaszczyzny hiperbolicznej w siebie. Wykaż, że nie zwiększa ono hiperbolicznej odległości między punktami.

Zadanie 12. ($*$) Czy istnieje działająca w sposób wolny i dyskretny[1] podgrupa grupy izometrii półpłaszczyzny hiperbolicznej, że po utożsamieniu punktów każdej orbity dostajemy powierzchnię homeomorficzną ze
a) sferą,
b) torusem,
c) preclem z dwoma dziurami,
d) preclem z trzema dziurami?

[1] Czyli dla każdego punktu x półpłaszczyzny obrazy x przy działaniu różnymi elementami grupy są różne oraz tworzą podzbiór dyskretny półpłaszczyzny.