# Geometria Różniczkowa I

**Zadania domowe (seria VI)**

**Zadanie 1.** Znajdź I formę podstawową powierzchni w $\mathbb{R}^3$ o parametryzacji

$$p(u,v) = (u\cos v,\ u\sin v,\ 2v),$$

nazywanej helikoidą lub powierzchnią śrubową.

**Zadanie 2.** Na powierzchni riemannowskiej z metryką

$$g_{11}(u,v) = 1, \qquad g_{12}(u,v) = 0, \qquad g_{11}(u,v) = \frac{1}{u^2+1}$$

znajdź sumę kątów wewnętrznych trójkąta utworzonego przez linie

$$u = v, \qquad u = -v, \qquad v = -1.$$

**Zadanie 3.** Dane są dwie paraboloidy: hiperboliczna $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = 2xy\}$ i eliptyczna $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = x^2 + y^2\}$. Sprawdź, czy rzut $g\colon H \to E$ wzdłuż osi $z$ jest
a) przekształceniem wiernopowierzchniowym,
b) przekształceniem wiernokątnym.

**Zadanie 4.** Niech H oznacza płaszczyznę Łobaczewskiego, tzn. $H = \{(x,y) \in \mathbb{R} \colon y > 0\}$ z metryką riemannowską

$$g_{11}(x,y) = g_{22}(x,y) = \frac{1}{y^2}, \qquad g_{12}(x,y) = 0$$

i niech $h$ będzie taką homografią płaszczyzny $\mathbb{R}^2$, że $h(H) = H$. Udowodnij, że $h|_H \colon H \to H$ jest izometrią wewnętrzną. (Homografie płaszczyzny to przekształcenia, które w zapisie zespolonym mają postać $z \to \frac{az+b}{cz+d}$, gdzie $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ oraz $ad - bc \neq 0$).


# Geometria Różniczkowa I

**Zadania domowe (seria VI)**

**Zadanie 1.** Znajdź I formę podstawową powierzchni w $\mathbb{R}^3$ o parametryzacji

$$p(u,v) = (u\cos v,\ u\sin v,\ 2v),$$

nazywanej helikoidą lub powierzchnią śrubową.

**Zadanie 2.** Na powierzchni riemannowskiej z metryką

$$g_{11}(u,v) = 1, \qquad g_{12}(u,v) = 0, \qquad g_{11}(u,v) = \frac{1}{u^2+1}$$

znajdź sumę kątów wewnętrznych trójkąta utworzonego przez linie

$$u = v, \qquad u = -v, \qquad v = -1.$$

**Zadanie 3.** Dane są dwie paraboloidy: hiperboliczna $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = 2xy\}$ i eliptyczna $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = x^2 + y^2\}$. Sprawdź, czy rzut $g\colon H \to E$ wzdłuż osi $z$ jest
a) przekształceniem wiernopowierzchniowym,
b) przekształceniem wiernokątnym.

**Zadanie 4.** Niech H oznacza płaszczyznę Łobaczewskiego, tzn. $H = \{(x,y) \in \mathbb{R} \colon y > 0\}$ z metryką riemannowską

$$g_{11}(x,y) = g_{22}(x,y) = \frac{1}{y^2}, \qquad g_{12}(x,y) = 0$$

i niech $h$ będzie taką homografią płaszczyzny $\mathbb{R}^2$, że $h(H) = H$. Udowodnij, że $h|_H \colon H \to H$ jest izometrią wewnętrzną. (Homografie płaszczyzny to przekształcenia, które w zapisie zespolonym mają postać $z \to \frac{az+b}{cz+d}$, gdzie $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ oraz $ad - bc \neq 0$).