

Geometria Różniczkowa I

Kolokwium I (16 października 2004, 14:15 - 15:45)

Zadanie 1. Znajdź naturalną parametryzację krzywej

$$r(t) = (t, \sqrt{2} \ln t, t^{-1}),$$

gdzie $t > 0$.

Zadanie 2. Wyznacz ewolutę krzywej o parametryzacji

$$r(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t),$$

gdzie $t \in \mathbb{R}$.

Zadanie 3. Pokaż, że wszystkie proste binormalne do krzywej o parametryzacji

$$r(t) = (\cosh t \cos t, \cosh t \sin t, t),$$

gdzie $t \in \mathbb{R}$, przecinają oś z , a ich odcinki od punktu $r(t)$ do punktu przecięcia z tą osią mają długość równą odwrotności torsji (skręcenia) w punkcie $r(t)$.

Zadanie 4. Dana jest krzywa leżąca na sferze jednostkowej w $\mathbb{R}^3$. Udowodnij, że w każdym punkcie krzywizna tej krzywej jest równa co najmniej 1.

Zadanie 5. (nieobowiązkowe) Niech $r(t)$ będzie funkcją z obszaru w $\mathbb{R}^1$ do $\mathbb{R}^1$ taką, że $r'(t) \neq 0$. Szwarcjanem funkcji r w punkcie t nazywamy liczbę

$$\mathcal{S}(r)(t) = \left(\frac{r''}{2r'} \right)' - \left(\frac{r''}{2r'} \right)^2.$$

Wykaż, że dla funkcji $r(t): (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $r' \neq 0$ zachodzi równoważność: $r(t)$ jest funkcją będącą ilorazem dwóch funkcji liniowych wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{S}(r)(t) = 0$ dla każdego $t \in (a, b)$.

Geometria Różniczkowa I

Kolokwium I (16 października 2004, 14:15 - 15:45)

Zadanie 1. Znajdź naturalną parametryzację krzywej

$$r(t) = (t, \sqrt{2} \ln t, t^{-1}),$$

gdzie $t > 0$.

Zadanie 2. Wyznacz ewolutę krzywej o parametryzacji

$$r(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t),$$

gdzie $t \in \mathbb{R}$.

Zadanie 3. Pokaż, że wszystkie proste binormalne do krzywej o parametryzacji

$$r(t) = (\cosh t \cos t, \cosh t \sin t, t),$$

gdzie $t \in \mathbb{R}$, przecinają oś z , a ich odcinki od punktu $r(t)$ do punktu przecięcia z tą osią mają długość równą odwrotności torsji (skręcenia) w punkcie $r(t)$.

Zadanie 4. Dana jest krzywa leżąca na sferze jednostkowej w $\mathbb{R}^3$. Udowodnij, że w każdym punkcie krzywizna tej krzywej jest równa co najmniej 1.

Zadanie 5. (nieobowiązkowe) Niech $r(t)$ będzie funkcją z obszaru w $\mathbb{R}^1$ do $\mathbb{R}^1$ taką, że $r'(t) \neq 0$. Szwarcjanem funkcji r w punkcie t nazywamy liczbę

$$\mathcal{S}(r)(t) = \left(\frac{r''}{2r'} \right)' - \left(\frac{r''}{2r'} \right)^2.$$

Wykaż, że dla funkcji $r(t): (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $r' \neq 0$ zachodzi równoważność: $r(t)$ jest funkcją będącą ilorazem dwóch funkcji liniowych wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{S}(r)(t) = 0$ dla każdego $t \in (a, b)$.