

# Conception d'un schéma adaptatif d'intégration en temps appliqué à la discrétisation par éléments finis des équations de Maxwell pour l'étude de la supraconductivité

Damien Tageddine

École Polytechnique Montréal

30 août 2018

# Plan

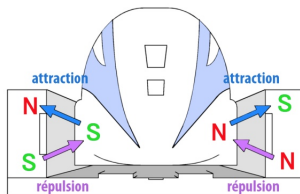
- 1 Mise en contexte
- 2 Objectif principal et développements théoriques
- 3 Résultats numériques
- 4 Application aux équations de supraconductivité
- 5 Conclusion

# La supraconductivité et ses applications

Transformateur électrique, IRM, train MagLev, ...



(a)



(b)

(tirées de <https://www.healthcare.siemens.co.uk/> et de <http://www.elmundofinanciero.com/>)

# Système d'équations

Les équations de Maxwell en basses fréquences sont données par :

$$\partial_t \mu \mathbf{H} + \nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\mathbf{E} - \rho \nabla \times \mathbf{H} = 0$$

$$\nabla \cdot \mu \mathbf{H} = 0$$

Les conditions aux frontières sont données par :

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{G}_1 \quad \text{sur } \Gamma \times I$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \mathbf{G}_2 \quad \text{sur } \Gamma \times I$$

# Supraconducteurs à haute température

On a une résistivité non linéaire :

$$\rho(\nabla \times \mathbf{H}) = \alpha \|\nabla \times \mathbf{H}\|_2^{p-1}$$

où  $\|\cdot\|_2$  est la norme Euclidienne et  $\alpha = \frac{E_c}{J_c^p}$ .

La densité de courant  $\mathbf{J}$  produit de forts gradients sur la densité de courant pour  $p$  grand.

# Problématiques

- Développement de solutions à fort gradient ;
- Nécessité d'obtenir une quantité d'intérêt précise (AC-loss) ;
- Inefficacité des discrétisations en temps à pas constants ;
- Phénomène d'équations différentielles dites raides.

# Revue de littérature

## Stratégies d'adaptation en temps en différences finies

- Extrapolation de Richardson ;
- Méthodes de prédiction-correction ;
- Méthodes de Runge-Kutta emboîtées ;

## Stratégies d'adaptation en temps basées sur une formulation variationnelle

- Estimateur d'erreur sur la solution ;
- Estimation d'erreur basée sur une quantité d'intérêt ;

# Objectifs de recherche

L'objectif principal de recherche est de développer une stratégie d'adaptation en temps basée sur un estimateur d'erreur pour la semi-discrétisation éléments-finis des équations de Maxwell pour l'étude de la supraconductivité.



# Objectifs de recherche

- La consistance, lorsque l'erreur globale du schéma d'intégration en temps tend vers zéro à mesure que les pas de temps sélectionnés sont petits ;
- L'efficacité, qui prend en compte le temps et les ressources de calcul que la méthode d'adaptation en temps mobilise ;
- La robustesse, que nous entendrons ici comme étant la capacité de la méthode d'adaptation en temps à pouvoir s'appliquer à un large spectre d'équations différentielles.

# Éléments de théorie

## Définition (Variations $\epsilon$ -voisines)

Soient  $\epsilon > 0$  fixé et  $u \in \mathcal{C}^m([0, T])$ , où  $m$  est un entier positif ou nul. On dira que  $u$  est à variations  $\epsilon$ -voisines d'ordre  $k$  ( $0 \leq k \leq m$ ), s'il existe une partition  $\mathcal{P} = \{t_0, \dots, t_n\}$  de  $I$  telle que

$$\Delta_k(u, \mathcal{P}) = \sum_{j=0}^k \sup_i |u^{(j)}(t_{i+1}) - u^{(j)}(t_i)| < \epsilon. \quad (1)$$

# Éléments de théorie

## Théorème (Estimateur d'erreur)

*Soit  $u$  la solution d'une EDO. Soit  $(u_j)$  l'approximation obtenue jusqu'au temps  $t_{n+1}$  à partir d'un schéma numérique, sur une grille formant une partition  $\mathcal{P}$  de l'intervalle  $[t_0, t_{n+1}]$ . On suppose que les coefficients  $\mathcal{B}_j$  associés au schéma numérique sont de la forme  $(??)$  pour tout  $t_j$  élément de  $\mathcal{P}$ . On suppose de plus que  $|\mathcal{P}| \approx \frac{1}{h_{\max}} + 1$ . Alors, pour  $m$  un entier positif donné, il existe un entier  $r$  et une constante  $C > 0$  tels que*

$$|u(t_{n+1}) - u_{n+1}| \leq C \Delta_m(u, \mathcal{P}) + \mathcal{O}(h_{\max}^r). \quad (2)$$

# Éléments de théorie

## Définition (Quantité d'intérêt)

*Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach,  $u$  un élément de  $X$  et  $Q$  une application de  $\mathcal{C}(X, Y)$ . On désignera par quantité d'intérêt (abrégé  $Qol$ ) l'image par  $Q$  de  $u$ , que l'on notera dorénavant  $Q(u)$ .*

# Éléments de théorie

## Théorème (Estimateur d'erreur en quantité d'intérêt)

Soient  $(C^m([0, T]), \|\cdot\|_\infty)$  et  $u$  la solution de (??) telle que  $u \in C^m([0, T])$ . Soit  $(u_j)$  l'approximation obtenue jusqu'au temps  $t_{n+1}$ , à l'aide d'un schéma numérique, sur une grille formant une partition  $\mathcal{P}$  de l'intervalle  $I_n = [t_0, t_{n+1}]$ . On considère une quantité d'intérêt  $Q \in C^{m+1}(X, \mathbb{R})$  de  $u$  qui vérifie

$$\forall j \in \{0, m\}, \forall t \in I_n, \quad D_u^j Q(u(t)) > 0. \quad (3)$$

Alors pour tout entier  $m$ , il existe des constantes  $C_1$  et  $C_2$  strictement positives telles que

$$C_1 \Delta_m(Q(u), \mathcal{P}) \leq \Delta_m(u, \mathcal{P}) \leq C_2 \Delta_m(Q(u), \mathcal{P}) + \mathcal{O}(h_{\max}). \quad (4)$$

# Éléments de théorie

---

```

1: while ( $n \leq n_{\max}$ ) and ( $t \leq t_{\max}$ ) do
2:   Calculer la nouvelle valeur  $u_{\text{new}}$  à partir d'un schéma d'intégration
3:   Mettre à jour la valeur de  $\Delta_k$ 
4:   if ( $\Delta_k(u) \geq \epsilon_R |u_{\text{new}}| + \epsilon_A$ ) and ( $h_n \geq \alpha h_{\min}$ ) then
5:      $h_n \leftarrow \alpha h_n$ 
6:      $t_n \leftarrow t_{n-1} + h_n$ 
7:   else if ( $\Delta_k(u) \leq \eta(\epsilon_R |u_{\text{new}}| + \epsilon_A)$ ) and ( $h_n \leq \beta h_{\max}$ ) then
8:      $u_{n+1} \leftarrow u_{\text{new}}$ 
9:      $h_{n+1} \leftarrow \beta h_n$ 
10:     $t_{n+1} \leftarrow t_n + h_{n+1}$ 
11:     $n \leftarrow n + 1$ 
12:   else
13:      $u_{n+1} \leftarrow u_{\text{new}}$ 
14:      $h_{n+1} \leftarrow h_n$ 
15:      $t_{n+1} \leftarrow t_n + h_{n+1}$ 
16:      $n \leftarrow n + 1$ 
17:   end if
18: end while

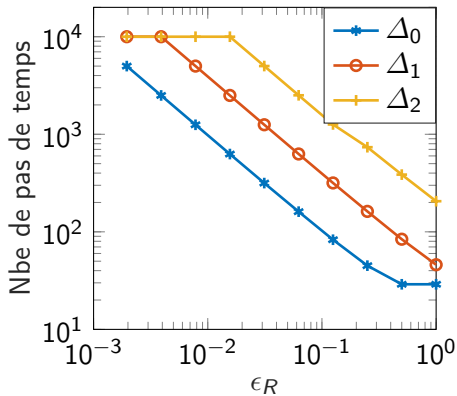
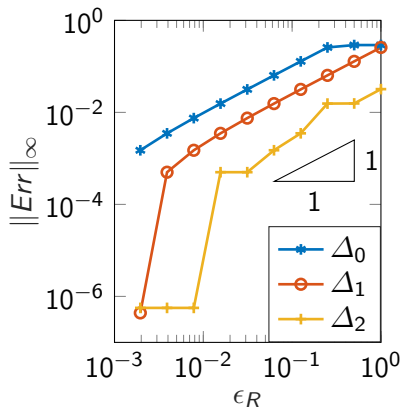
```

# Équation harmonique

Équation harmonique :

$$\begin{cases} u' = \lambda u, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (5)$$

# Équation harmonique



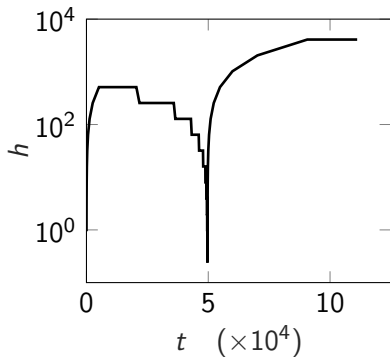
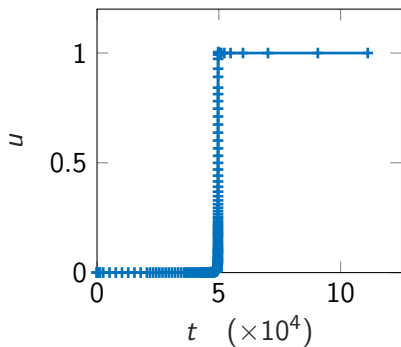


# Équation de combustion

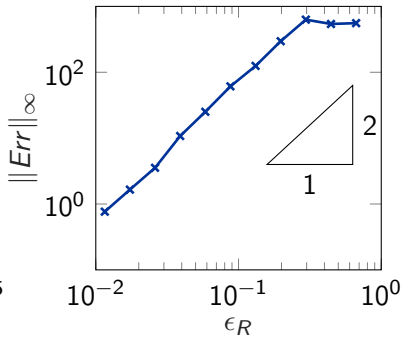
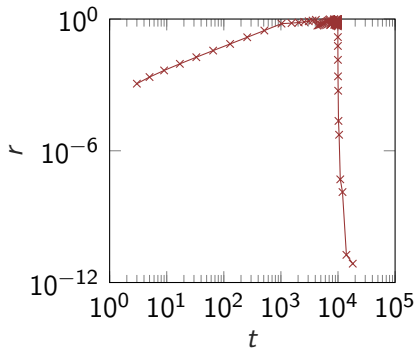
Équation de combustion :

$$\begin{cases} u' = u^2(1 - u), \\ u(0) = \delta. \end{cases} \quad (6)$$

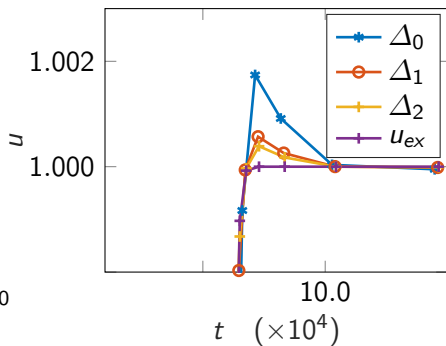
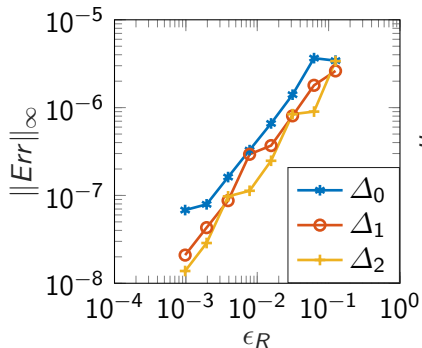
# Équation de combustion



# Équation de combustion



# Équation de combustion

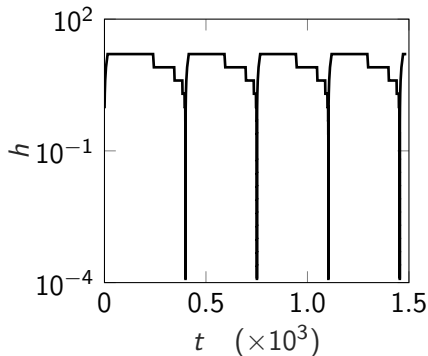
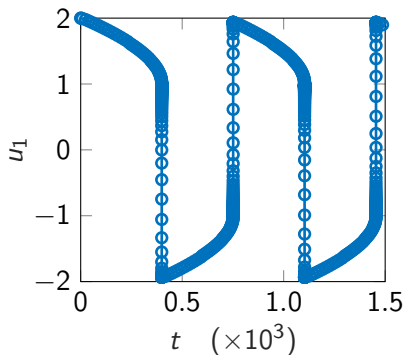


# Système de Van Der Pol

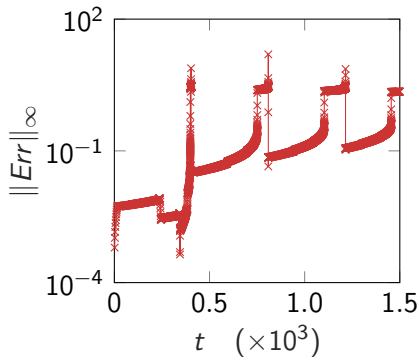
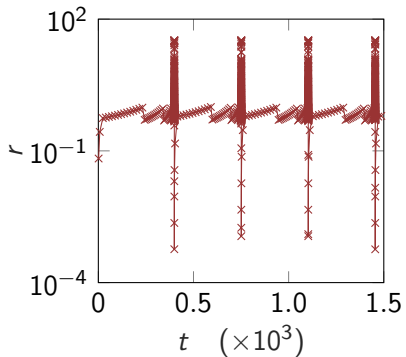
Système de Van Der Pol :

$$\begin{cases} u_1' = u_2, \\ u_2' = \mu(1 - u_1^2)u_2 - u_1, \\ u_1(0) = 2, \quad u_2(0) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

# Système de Van Der Pol



# Système de Van Der Pol



# Oscillateur harmonique amorti

Oscillateur harmonique amorti :

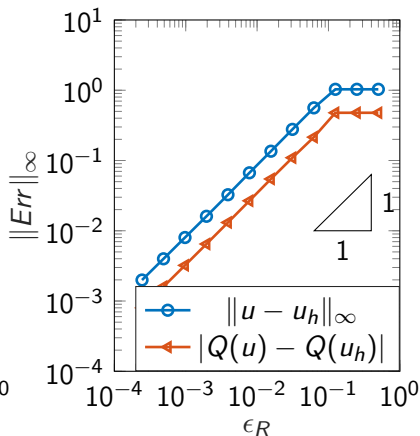
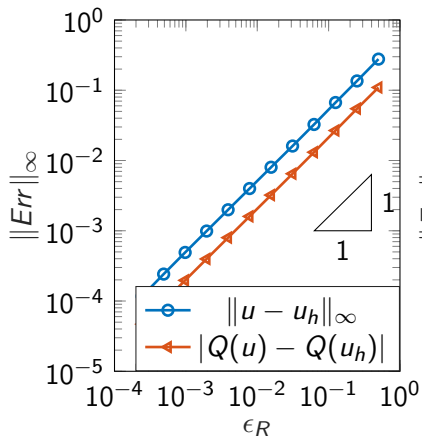
$$\begin{cases} u_1' = u_2, \\ u_2' = -\left(\frac{\gamma}{m}u_2 + \frac{k}{m}u_1\right), \\ u_1(0) = 1, \quad u_2(0) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Quantité d'intérêt :

$$Q(t, u_1, u_2) := \frac{e^{\frac{\gamma}{m}t}}{2} (mu_2^2 + \gamma u_1 u_2 + ku_1^2) \quad (9)$$



# Oscillateur harmonique amorti



# Modélisation d'un câble supraconducteur

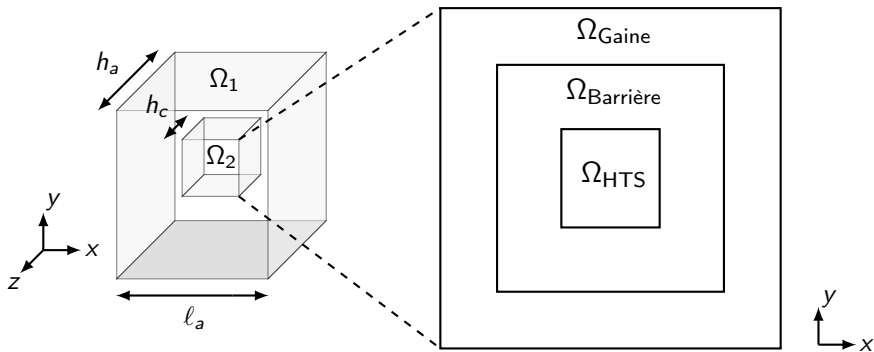
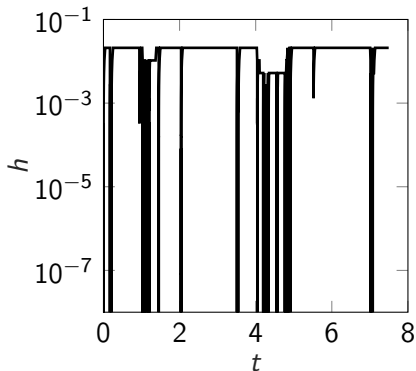
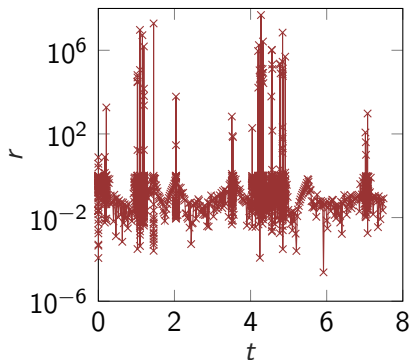


Figure – Modélisation du câble supraconducteur.

# Modélisation d'un câble supraconducteur



# Modélisation d'un câble supraconducteur

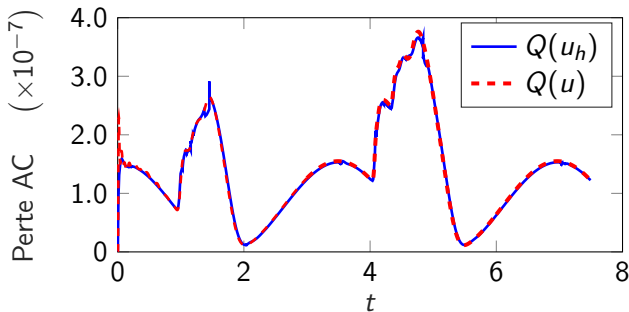


Figure – Comparaison des pertes de courant AC avec une adaptation en temps selon les variations de la quantité d'intérêt et une résolution à pas constant  $h = 10^{-4}$ .

# Conclusion

- Démontrer un lien entre l'estimateur d'erreur et l'erreur de troncature locale afin de prouver la consistance de la stratégie d'adaptation en temps ;
- Démontrer que la stratégie développée peut s'appliquer à une quantité d'intérêt physique pertinente pour une équation donnée ;
- Vérifier la méthode développée sur des problèmes raides standards de la littérature ;
- Vérifier la stratégie d'adaptation en temps sur un problème d'électromagnétisme modélisant un matériau supraconducteur ;

# Références I



K. E. Brenan, Campbell S. L., and Petzold L. R.  
*Numerical Solution of Initial-Value Problems in  
Differential-Algebraic Equations.*  
Siam, 1996.



K. Eriksson and C. Johnson.  
Error estimates and automatic time step control for nonlinear  
parabolic problems.  
*Society For Industrial And Applied Mathematics*, 1987.



A. Fortin.  
*Analyse Numérique pour Ingénieurs.*  
Presses Internationales Polytechnique, 2012.

## Références II



E. Hairer, S. P. Norsett, and G. Wanner.

*Solving Ordinary Differential Equation I, Nonstiff Problems.*  
Springer, 2008.



E. Hairer and G. Wanner.

*Solving Ordinary Differential Equation II, Stiff and  
Differential-Algebraic Problems.*  
Springer, 1980.



C. Johnson.

*Numerical Solution of Partial Differential Equations by the  
finite Element Method.*  
Cambridge University Press, 1994.

## Références III



Y. Law and M. Laforest.

A nonlinear relaxation formulation of the p-curl problem modelling high-temperature superconductors : A modified yee's scheme.

*Journal of Computational Physics*, 2018.






Y. Law-Kam-Cio.

*Méthode de Galerkin Discontinue pour la Discrétisation en Éléments Finis des Équations de Maxwell pour la Modélisation de Problèmes d'Électromagnétisme en Basses Fréquences.*

PhD thesis, École Polytechnique de Montréal, 2018.



## Références IV

-  S. Safran, J. Souc, F. Gömörý, P. Kovac, and A. Gencer.  
Experimentally determined magnetization ac losses of mono and multifilamentary mgb2 wires.  
*Journal of Superconductivity and Novel Magnetism*, 2013.
-  L. F. Shampine and A. Witt.  
A simple step size selection algorithm for ode codes.  
*Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1993.
-  A. Wan and M. Laforest.  
A posteriori error estimation for the p-curl problem.  
*Society For Industrial And Applied Mathematics*, 2016.

# Problèmes raides

- A linear constant coefficient system is stiff if all of its eigenvalues have negative real part and the stiffness ratio is large.
- Stiffness occurs when stability requirements, rather than those of accuracy, constrain the steplength.
- Stiffness occurs when some components of the solution decay much more rapidly than others.