C. R. Acad. Sc. Paris, t. 272, p. 1501-1503 (7 juin 1971). Série A

D - B

# ALGÈBRE DES CATÉGORIES. — *Catégories exactes.*

Note (*) de M. **Michael Barr** [1], transmise par M. Jean Dieudonné.

On donne les définitions et quelques résultats de la théorie des catégories exactes (notion distincte de celle de Brinkmann-Puppe [2]).

1. Définition d'une catégorie exacte. — Une catégorie est dite *exacte* si elle satisfait aux conditions suivantes :

(EX 1) Tout morphisme possède une congruence nucléaire (« *kernel pair* »); toute congruence nucléaire admet un coégalisateur; si $f$ et $g$ sont des morphismes de même but et si $f$ est un épimorphisme régulier, alors leur produit fibré existe et le morphisme dans le carré cartésien opposé à $f$ est également un épimorphisme régulier.

(EX 2) Toute relation d'équivalence est effective.

Une catégorie qui ne satisfait qu'à la condition (EX 1) est dite *régulière*.

La notion de catégorie exacte est une généralisation de la notion de catégorie abélienne dans le sens précisé par le théorème suivant [3].

Théorème. — *Une catégorie* $\mathbf{A}$ *est abélienne si et seulement si* $\mathbf{A}$ *est exacte et additive.*

2. Exemples de catégories exactes. — (1) La catégorie $\mathbf{Ens}$ des ensembles. (2) Pour n'importe quelle théorie algébrique $\mathbf{Th}$, la catégorie $\mathbf{Ens}^{\mathbf{Th}}$ des $\mathbf{Th}$-algèbres. (3) Pour une théorie $\mathbf{Th}$ de rang fini et une catégorie exacte $\mathbf{E}$, la catégorie $\mathbf{E}^{\mathbf{Th}}$ des $\mathbf{Th}$-algèbres dans E. (4) Pour une petite catégorie $\mathbf{C}$ et une catégorie exacte $\mathbf{E}$, la catégorie des foncteurs $(\mathbf{C}, \mathbf{E})$. (5) Pour une catégorie exacte, toute sous-catégorie dont l'injection possède un adjoint à gauche exact. (6) Tout topos (ce qui résulte en combinant les deux exemples précédents). (7) Tout ensemble partiellement ordonné, considéré comme catégorie.

3. Caractérisation des catégories exactes et régulières. — Soient $\mathbf{D}$ et $\mathbf{E}$ des catégories régulières. Un foncteur $U : \mathbf{D} \to \mathbf{E}$ est dit exact (resp. réflexivement exact) s'il préserve (resp. préserve et reflète) les limites finies (pour autant qu'elles existent) ainsi que les épimorphismes réguliers. Observez que dans le cas spécial où $\mathbf{D}$ et $\mathbf{E}$ sont des catégories abéliennes, un foncteur est exact au sens ci-dessus si et seulement si il est exact et additif au sens habituel.

Théorème. — *Soit* $\mathbf{E}$ *une petite catégorie. Pour que* $\mathbf{E}$ *soit régulière, il faut et il suffit qu'il existe un foncteur réflexivement exact, plein et fidèle de* $\mathbf{E}$ *dans une catégorie de foncteurs* $(\mathbf{C}, \mathbf{Ens})$ *pour une petite catégorie* $\mathbf{C}$.

Corollaire. — *Soit* **E** *une petite catégorie. Pour que* **E** *soit exacte, il faut et il suffit qu'il existe un foncteur réflexivement exact, plein et fidèle qui préserve les coégalisateurs des relations d'équivalence dans une catégorie de foncteurs* (**C**, **Ens**) *pour une petite catégorie* **C**.

A partir de ce théorème, il est facile d'obtenir le théorème de plongement de Barry Mitchell [4]. Les applications de notre théorème sont de la même nature que celles du théorème de Mitchell. A titre d'illustration, on donne la proposition suivante qui devrait avoir des applications dans la théorie de la descente ainsi que dans la théorie des topos.

Proposition. — *Étant donné, dans une catégorie régulière, le diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, shift left, "d^0"] \arrow[r, shift right, "d^1"'] \arrow[d, "f_1"'] & X_0 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f_0"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y_1 \arrow[r, shift left, "e^0"] \arrow[r, shift right, "e^1"'] & Y_0 \arrow[r, "e"] & Y \end{tikzcd}$$

*aux lignes exactes* (*c'est-à-dire à la fois coégalisateur et congruence nucléaire*), *si le carré*

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "f_1"'] & X_0 \arrow[d, "f_0"] \\ Y_1 \arrow[r, "e^0"] & Y_0 \end{tikzcd}$$

*est cartésien, le carré*

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f_0"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y_0 \arrow[r, "e"] & Y \end{tikzcd}$$

*l'est également.*

Grâce à notre théorème, il suffit de donner la démonstration dans la catégorie des ensembles pour l'avoir dans une catégorie régulière quelconque.

4. G-objets à gauche et objets principaux. — Soit E une catégorie exacte possédant un objet terminal, noté 1. Étant donné un groupe G dans E, on définit des G-*objets à gauche*, c'est-à-dire, des objets X de **E** munis d'une opération $G \times X \to X$ et leurs morphismes. La catégorie qui en résulte est notée **LO** (G). Un G-objet à gauche X est appelé *objet principal* si 1° le morphisme $X \to 1$ est un épimorphisme régulier et 2° le morphisme $G \times X \to X \times X$, dont la première composante est l'opération $G \times X \to X$ et la deuxième composante est la projection $G \times X \to X$, est un isomorphisme. Nous désignons par **PLO** (G) la sous-catégorie pleine de **LO** (G) engendrée par les objets principaux.

La catégorie **PLO** (G) est un groupoïde avec composante distinguée, à savoir, celle qui contient G. Le groupe d'automorphismes d'un objet de cette composante distinguée est notée $H^0$ (G), et l'ensemble (ou la classe) des composantes de **PLO** (G) est notée $H^1$ (G).

A partir d'une suite exacte :

$$1 \to G' \to G \to G'' \to 1$$

les groupes dans E, on obtient une suite exacte (d'abord de groupes, ensuite d'ensembles pointés) :

$$1 \to H^0(G') \to H^0(G) \to H^0(G'') \to H^1(G') \to H^1(G) \to H^1(G'').$$

5. La multiplication de Baer. — Supposons que le groupe G dans **E** soit commutatif. Alors $H^0$ (G) est aussi un groupe commutatif.

De plus, il y a un « produit tensoriel » dans la catégorie **LO** (G) dont la restriction à la sous-catégorie **PLO** (G) induit une multiplication dans $H^1$ (G).

L'ensemble pointé $H^1$ (G) devient alors un groupe commutatif.

Dans les cas classiques, les groupes $H^0$ (G) et $H^1$ (G) sont les groupes de cohomologie habituels [la dimension étant celle utilisée en cohomologie « tripleable », *voir* (5)].

En outre, la multiplication dans $H^1$ (G) est celle de Baer.

(*) Séance du 24 mai 1971.

(1) Ce travail a été subventionné par le Fonds National Suisse et le Conseil National de Recherches du Canada.

(2) Brinkmann-Puppe, *Springer Lecture Notes*, 96, 1969, p. 15.

(3) M. Tierney (non publié).

(4) B. Mitchell, *Theory of Categories*, Academic Press, New York and London, 1965, p. 151.

(5) M. Barr et J. Beck, *Proceedings of the Conference on Categorical Algebra*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1966, p. 336-343.

*Institut de Mathématiques*
*de l'Université de Fribourg,*
1700 *Fribourg, Suisse.*

184008. — Imp. Gauthier-Villars. — 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e).
Imprimé en France.