

# LE COÛT EST UN INVARIANT ISOPÉRIMÉTRIQUE

MIKAËL PICHOT ET STÉPHANE VASSOUT

RÉSUMÉ. Soit  $R$  une relation d'équivalence mesurée ergodique de type  $\text{II}_1$  sur un espace de probabilité  $(X, \mu)$  sans atome. On montre que

$$C(R) = 1 + \frac{1}{2}h(R),$$

où  $C(R)$  est le coût de  $R$ , supposé fini, et  $h(R)$  sa constante isopérimétrique. Cela fait suite aux résultats récents de Russell Lyons et des auteurs sur le sujet.

## 1. INTRODUCTION

Soit  $R$  une relation d'équivalence mesurée ergodique de type  $\text{II}_1$  (à classes dénombrables) sur un espace de probabilité  $(X, \mu)$  sans atome. Comme pour les groupes dénombrables, on associe à tout système générateur  $\Phi$  de  $R$  un graphe de Cayley  $\Sigma_\Phi$  sur lequel la relation  $R$  agit ( $\Phi$  est aussi appelé un graphage de  $R$ ). Suivant G. Levitt (voir [1]), le *coût* de  $R$  est défini par

$$C(R) = \inf_{\Phi} \frac{1}{2} \text{val}_{\mu}(\Sigma_{\Phi})$$

où l'infimum porte sur les systèmes générateurs de  $R$  et  $\text{val}_{\mu}$  est la valence moyenne dans  $\Sigma_{\Phi}$  prise relativement à  $\mu$ . Il s'agit a priori d'un nombre réel compris entre 1 et  $\infty$  (inclus) ; D. Gaboriau a montré dans [1] que toutes les valeurs de  $[1, \infty]$  étaient atteintes.

Un autre invariant de  $R$ , la *constante isoperimétrique*  $h(R)$ , peut être défini à partir des  $\Sigma_{\Phi}$  :

$$h(R) = \inf_{\Phi} h(\Sigma_{\Phi})$$

où  $h(\Sigma_{\Phi})$  est la constante isopérimétrique de  $\Sigma_{\Phi}$ , définie de façon appropriée (une définition précise est rappelée à la section 2). Cet invariant, à valeurs dans  $[0, \infty]$ , a été introduit par R. Lyons et les auteurs dans [3].

Dans [3] il est montré que

$$C(R) \leq 1 + \frac{1}{2}h(R),$$

si  $R$  est de coût fini, et que  $h(R) = 0$  dès que  $C(R) = 1$ . Nous renvoyons à cet article pour des détails sur ces deux énoncés ainsi que leurs preuves. Le théorème principal de cet article complète ces deux résultats :

**Théorème 1.** *Soit  $R$  une relation d'équivalence mesurée ergodique de type  $\text{II}_1$  sur un espace de probabilité  $(X, \mu)$  sans atome. Si  $C(R) < \infty$ , alors*

$$C(R) = 1 + \frac{1}{2}h(R),$$

où  $C(R)$  est le coût de  $R$  et  $h(R)$  la constante isopérimétrique.

Le théorème 1 établit l'égalité entre deux invariants de  $R$  de nature très différente : le coût de  $R$  est un invariant *local* des graphes de Cayley de  $R$  (par définition), alors que la constante isopérimétrique en est un invariant *asymptotique*. L'énoncé correspondant en théorie des groupes n'est bien sûr pas correct. Si  $\Gamma$  est un groupe dénombrable infini de type fini, l'analogie du coût est le nombre minimal  $g(\Gamma)$  de générateurs de  $\Gamma$  (i.e. la valence minimale des graphes de Cayley divisée par 2), et la constante isopérimétrique de

$\Gamma$  est l'infimum  $h(\Gamma)$ , sur les graphes de Cayley  $Y$  de type fini de  $\Gamma$ , de la constante de isopérimétrique habituelle de  $Y$ . En général, les deux constantes  $g(\Gamma)$  et  $h(\Gamma)$  ne coïncident pas modulo renormalisations. Par exemple pour les groupes abéliens libres  $\mathbf{Z}^n$ ,  $n \geq 2$ , ou plus généralement pour les groupes moyennables non cycliques, on a  $h(\Gamma) = 0$  et  $g(\Gamma) > 1$ . Une égalité analogue à celle du théorème 1 a lieu cependant pour le groupe libre  $\Gamma = F_k$  à  $k$  générateurs ; dans ce cas  $g(F_k) = k$  et  $h(F_k) = 2k - 2$ . En fait, il est facile de voir que pour un groupe de type fini  $\Gamma$ , l'égalité  $g(\Gamma) = 1 + \frac{1}{2}h(\Gamma)$  n'a lieu que si  $\Gamma$  est un groupe libre. En effet,  $g(\Gamma)$  est atteint pour un certain système générateur (fini)  $S$ , et pour ce  $S$  on a donc  $2(|S| - 1) = h(\Gamma) \leq h(Y)$ , où  $h(Y)$  est la constante isopérimétrique du graphe de Cayley  $Y$  de  $\Gamma$  relativement à  $S$ . En appliquant cette inégalité aux boules  $B_n$  de  $Y$ , on obtient par un calcul immédiat que  $|B_n| \geq 2|S|(2|S| - 1)^{n-1}$  pour tout  $n \geq 1$ , et donc que  $\Gamma$  est un groupe libre. Au contraire, le coût  $C(R)$  de  $R$  n'est jamais atteint, sauf si  $R$  est arborable (cf. [1]).

**Remerciements.** Nous remercions George Skandalis qui a suggéré que l'inégalité de [3] était une égalité. Le premier auteur est financé par JSPS et l'Université de Tokyo (IPMU).

## 2. RAPPELS ET NOTATIONS

Faisons quelques brefs rappels pour fixer les notations. Pour plus de détails sur les graphages et le coût des relations d'équivalences, nous renvoyons aux articles [1, 2] de D. Gaboriau.

Soit  $\Phi$  une famille dénombrable d'isomorphismes partiels de  $R$ , i.e. d'isomorphismes partiels  $\varphi$  de  $X$  tels que  $x \sim \varphi(x) \bmod(R)$ . Le *coût* de  $\Phi$  est le nombre positif (possiblement infini)

$$C(\Phi) = \sum_{\varphi \in \Phi} \mu(\text{dom } \varphi) = \sum_{\varphi \in \Phi} \mu(\text{Im } \varphi)$$

où  $\text{dom } \varphi$  et  $\text{Im } \varphi$  sont respectivement le domaine et l'image de  $\varphi$ . On dit que  $\Phi$  est un *système de générateurs* de  $R$  si, presque sûrement, étant donnés deux points  $x, y \in X$  équivalents modulo  $R$ , il existe une composée  $\psi = \varphi_n^{\varepsilon_n} \dots \varphi_1^{\varepsilon_1}$  telle que  $\psi(x) = y$ , où  $\varphi_i \in \Phi$  et  $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ . Le *coût* de  $R$  est l'infimum

$$C(R) = \inf_{\Phi} C(\Phi)$$

pris sur tous les systèmes générateurs  $\Phi$  de  $R$  (voir [1]). À un système générateur  $\Phi$  de  $R$  est naturellement associé un *graphe de Cayley*  $\Sigma_{\Phi}$  de  $R$ . Rappelons simplement que  $\Sigma_{\Phi}$  est fibré au-dessus de  $X$ , et que la fibre  $\Sigma_{\Phi}^x$  en  $x \in X$  est un graphe connexe dont les sommets sont les éléments de  $R^x$  et les arêtes l'ensemble des couples  $((x, y), (x, \varphi(y))) \in R^x \times R^x$  pour  $\varphi \in \Phi$  tel que  $y \in \text{dom } \varphi$ . Il est clair que la définition du coût de  $R$  donné ci-dessus coïncide avec celle donnée en introduction.

Dans [3] nous définissons une constante isopérimétrique  $h(\Sigma_{\Phi})$  de  $\Sigma_{\Phi}$  comme suit :

$$h(\Sigma_{\Phi}) = \inf_A \frac{\nu^{(1)}(\partial_{\Sigma_{\Phi}} A)}{|A|}$$

où  $\nu^{(1)}$  est la mesure de décompte sur le 1-squelette de  $\Sigma_{\Phi}$ , et  $A$  un ensemble fini de sommets symétriques de  $\Sigma_{\Phi}$  deux à deux disjoints. Par définition, on appelle sommet symétrique de  $\Sigma_{\Phi}$  (le graphe d') un automorphisme du groupe plein de  $R$  (i.e. un automorphisme de  $X$  dont le graphe est inclus dans  $R$ ), et on dit que deux sommets sont disjoints si l'intersection de leurs graphes est négligeable pour la mesure sur  $R$  (voir [3, Définition 4.1]). Le bord  $\partial_{\Sigma_{\Phi}} A$  de l'ensemble  $A$  est l'ensemble des arêtes de  $\Sigma_{\Phi}$  avec exactement un sommet dans  $A$  (i.e. dans le graphe d'un automorphisme de  $A$ ). Notons que cette définition de  $h(\Sigma_{\Phi})$  ne revient pas à « moyenner la constante isopérimétrique des fibres ».

La constante isopérimétrique de  $R$  est l'infimum

$$h(R) = \inf_{\Phi} h(\Sigma_{\Phi})$$

pris sur tous les systèmes générateurs  $\Phi$  de  $R$ .

### 3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

Soit  $R$  une relation d'équivalence ergodique de type  $\text{II}_1$  sur un espace de probabilité  $(X, \mu)$  sans atome. Nous montrons ici que

$$C(R) \geq 1 + \frac{1}{2}h(R),$$

l'inégalité inverse faisant l'objet de [3, Theorem 12]. On suppose  $C(R) < \infty$ .

Soit  $\varphi$  un automorphisme ergodique du groupe plein de  $R$ . Étant donné  $\varepsilon > 0$ , on peut compléter  $\varphi$  par une famille  $\Phi'_\varepsilon$  d'isomorphismes partiels de  $R$  de sorte que

$$\Phi_\varepsilon = \Phi'_\varepsilon \cup \{\varphi\}$$

soit un graphage de  $R$ , satisfaisant

$$C(\Phi_\varepsilon) < C(R) + \varepsilon/4$$

(voir [1, Lemme III.5]).

Soit  $f$  la fonction définie pour  $x \in X$  par

$$f(x) = \sum_{\psi \in \Phi'_\varepsilon} \chi_{\text{dom } \psi}(x) + \chi_{\text{Im } \psi}(x).$$

Elle a pour intégrale

$$\int_X f d\mu = 2C(\Phi'_\varepsilon).$$

Comme la mesure  $\mu$  est invariante, il en résulte que

$$\frac{1}{n+1} \int_X \sum_{i=0}^n f(\varphi^i(x)) d\mu(x) = 2C(\Phi'_\varepsilon)$$

pour tout nombre entier  $n \geq 0$ .

Fixons  $n > 4/\varepsilon$  et considérons l'ensemble  $A_n$  défini par

$$A_n = \{\varphi^i\}_{i=0}^n.$$

Clairement  $A_n$  est un ensemble de points symétriques deux à deux disjoints de  $\Sigma_\varepsilon$ , au sens de [3, Definition 8]. De plus pour  $x \in X$  le bord de  $A_n^x$  dans  $\Sigma_\varepsilon^x$  vérifie

$$|\partial_{\Sigma_\varepsilon^x} A_n^x| \leq \sum_{i=0}^n f(\varphi^i(x)) + 2,$$

où  $|\cdot|$  est le cardinal. Notons qu'on a égalité si  $x \not\sim \psi(x) \pmod{(R_\varphi)}$  pour tout  $\psi \in \Phi'_\varepsilon$  et tout  $x \in \text{dom } \psi$  — ce qu'on peut supposer a priori quitte à réduire les domaines des éléments de  $\Phi'_\varepsilon$ , mais ce n'est pas nécessaire.

Par suite on a :

$$\frac{1}{n+1} \nu^{(1)}(\partial_{\Sigma_\varepsilon} A_n) \leq 2C(\Phi'_\varepsilon) + \frac{2}{n+1} < 2(C(R) - 1) + \varepsilon,$$

où  $\nu^{(1)}$  est la mesure naturelle sur le 1-squelette de  $\Sigma_\varepsilon$  (associée à la mesure de Haar sur  $R$ ). Comme

$$h(R) \leq \inf_A \frac{\nu^{(1)}(\partial_{\Sigma_\varepsilon} A)}{|A|} \leq \frac{1}{n+1} \nu^{(1)}(\partial_{\Sigma_\varepsilon} A_n),$$

on obtient

$$h(R) < 2(C(R) - 1) + \varepsilon,$$

et lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,

$$C(R) \geq 1 + \frac{1}{2}h(R),$$

ce qu'il fallait démontrer.

#### 4. COMMENTAIRES

**4.1. Formule de compression.** Dans [3] on montre que le groupe fondamental d'une relation uniformément non moyennable ergodique  $R$  est trivial, en établissant l'inégalité

$$h(R) \leq \mu(D)h(R|_D)$$

où  $D$  est une partie borélienne non négligeable de  $X$  et  $R|_D$  est la restriction de  $R$  à  $D$ . En fait cette inégalité est une égalité :

**Corollaire 2.** *Soit  $R$  comme dans le théorème 1 et  $D$  une partie borélienne non négligeable de  $X$ . On a :*

$$h(R) = \mu(D)h(R|_D).$$

Ceci résulte immédiatement du théorème 1 et la proposition II.6 de [1] concernant le coût.

**4.2. Une autre définition du bord.** Conservant les notations introduites ci-dessus, on peut aussi définir le bord  $\partial_\Sigma A$  comme l'ensemble des *points de  $R$*  dans le bord de  $A$  relativement à  $\Sigma$  (plutôt que les *arêtes de  $\Sigma$*  dans le bord de  $A$  relativement à  $\Sigma$ ). On obtient alors une constante  $h'(R)$ , a priori plus petite que  $h(R)$ , et les résultats de [3] établissent l'inégalité (voir la note p. 598)

$$C(R) \leq 1 + \frac{h'(R)}{2}.$$

On a donc en fait, d'après le théorème 1 :

$$C(R) = 1 + \frac{h(R)}{2} = 1 + \frac{h'(R)}{2}.$$

Comme noté dans [3, p. 598], la version  $h'$  de la constante isopérimétrique est évidemment majorée par le taux de croissance uniforme  $\omega(\Gamma)$  de  $\Gamma$  moins 1, et on a donc

$$\omega(\Gamma) \geq 2\beta_1(\Gamma) + 1$$

(voir [3, Cor. 3.2]), où  $\beta_1(\Gamma)$  est le premier nombre de Betti  $\ell^2$  de  $\Gamma$ .

**4.3. Taux de cycles.** Rappelons qu'à une relation d'équivalence  $R$  ergodique de type  $\text{II}_1$  est associée une suite de nombres positifs  $\beta_0(R), \beta_1(R), \beta_2(R), \dots$ , appelés nombres de Betti  $\ell^2$  de  $R$  (voir [2]). On a toujours

$$C(R) \geq \beta_1(R) + 1$$

et on se sait pas si l'inégalité peut être stricte (voir la section 3.6 de [2]). Le *taux de cycle* de  $R$  (voir [5]) est défini comme suit :

$$\tau(R) = \inf_{\Phi} \dim_{LR} \overline{Z_1(\Sigma_\Phi)},$$

où l'infimum est pris sur les systèmes générateurs  $\Phi$  de  $R$ ,  $\Sigma_\Phi$  est le graphe de Cayley de  $\Phi$ ,  $Z_1(\Sigma_\Phi)$  est l'espace des cycles de  $\Sigma_\Phi$ . La dimension  $\dim_{LR}$  est la dimension de l'adhérence Hilbertienne  $\overline{Z_1(\Sigma_\Phi)}$  prise au sens de Murray et von Neumann (comme pour les nombres de Betti  $\ell^2$ ), où  $LR$  désigne l'algèbre de von Neumann de  $R$ . On a alors

$$C(R) = \tau(R) + \beta_1(R) + 1$$

pour toute relation ergodique  $\text{II}_1$  de coût fini (voir [5, 4]), et il n'y a pas d'exemples connus pour lesquels  $\tau(R) > 0$ . Le taux de cycles a été introduit dans [5] conjointement avec une technique *d'effaçage de cycles*, qui permet de faire diminuer la dimension  $\dim_{LR} \overline{Z_1(\Sigma_\Phi)}$ .

En fait (cf. [5]) il est possible *d’effacer récursivement tous les cycles* d’un graphage donné— mais ceci ne suffit pas a priori à entraîner  $\tau(R) = 0$ . Le théorème 1 pourrait fournir une nouvelle approche à ces questions.

#### RÉFÉRENCES

- [1] Gaboriau D., “Coût des relations d’équivalence et des groupes”, *Invent. Math.* 139, no. 1, 41–98, 2000.
- [2] Gaboriau D., “Invariants  $l^2$  de relations d’équivalence et de groupes”, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* No. 95, 93–150, 2002.
- [3] Lyons R., Pichot M., Vassout S., Uniform non amenability and the first  $L^2$ -Betti number, *Groups Geom. Dyn.*, to appear.
- [4] Pichot M., “Semi-continuity of the first  $\ell^2$ -Betti number on the space of finitely generated groups”, *Comm. Math. Helv.*, 81, No. 3, 643–652, 2006.
- [5] Pichot M., “Quasi-périodicité et théorie de la mesure”, Ph.D. Thesis. École Normale Supérieure de Lyon, 2005. Available at <http://www.ihes.fr/~pichot>

MIKAËL PICHOT, IPMU, UNIVERSITY OF TOKYO, 3-8-1 KOMABA, TOKYO, 153-8914 JAPAN  
*E-mail address:* `pichot@ms.u-tokyo.ac.jp`

STÉPHANE VASSOUT, INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE JUSSIEU AND UNIVERSITÉ PARIS 7  
*E-mail address:* `vassout@math.jussieu.fr`