

ADAPTIEVE WAVELETALGORITMEN VOOR HET OPLOSSEN VAN OPERATORVERGELIJKINGEN: PROEFSCHRIFT SAMENVATTING

TSOGTGEREL GANTUMUR

Dit proefschrift behandelt verscheidene aspecten van het oplossen van operatorvergelijkingen met behulp van adaptieve waveletmethoden. Voor een separabele Hilbertruimte H , een lineaire functionaal $f \in H'$, en een inverteerbare lineaire operator $A : H \rightarrow H'$, beschouwen we het probleem van het oplossen van $u \in H$ uit de vergelijking

$$Au = f.$$

In veel voorkomende gevallen wordt A gegeven door een variationele formulering van een randwaardenprobleem of singuliere integraalvergelijking, en is H een Sobolev-ruimte op een domein of variëteit, mogelijk inclusief essentiële randvoorwaarden. We zullen vaak aannemen dat A zelfgeadjungeerd en H -elliptisch is. Algemene operatoren kunnen worden behandeld door bijvoorbeeld normaalvergelijkingen op te stellen, hoewel in specifieke gevallen kwantitatief betere alternatieven bestaan.

In de grensverleggende artikelen [*Math. Comp.*, 70:27–75, 2001] en [*Found. Comput. Math.*, 2(3):203–245, 2002] introduceerden Cohen, Dahmen en DeVore adaptieve waveletmethoden voor het numeriek oplossen van dit probleem. Het idee is om met behulp van een Riesz-basis $\Psi = \{\psi_i \in H : i \in \mathbb{N}\}$ voor H het oorspronkelijke probleem te vertalen naar een probleem in termen van de coëfficiëntvector $\mathbf{u} \in \ell_2$ van u ten opzichte van de basis Ψ . Deze $\mathbf{u} \in \ell_2$ is de unieke oplossing van

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f},$$

waarin $\mathbf{A} : \ell_2 \rightarrow \ell_2$ een oneindig-dimensionale stijfheidsmatrix met elementen $\mathbf{A}_{ik} = [A\psi_k](\psi_i) \in \mathbb{R}$ is, en $\mathbf{f} \in \ell_2$ een oneindig dimensionaal rechterlid met elementen $\mathbf{f}_i = f(\psi_i) \in \mathbb{R}$. Aangetoond is dat onder zekere voorwaarden betreffende de kosten van het evalueren van de elementen uit de stijfheidsmatrix, de eerder genoemde adaptieve waveletmethoden voor het oplossen van dit oneindige matrix-vectorprobleem van optimale complexiteit zijn. In dit proefschrift zullen we deze voorwaarden verifiëren, het toepassingsgebied van deze waveletalgoritmen uitbreiden en, bovenal, aangepaste adaptieve algoritmen met betere kwantitatieve eigenschappen ontwikkelen en analyseren.

Hoofdstuk 1 (*Introduction*) vormt een algemene inleiding op het proefschrift.

Hoofdstuk 2 (*Basic principles*) geeft een korte inleiding in de theorie van adaptieve algoritmen. We beginnen met essentiële eigenschappen van waveletbases, en geven kort enkele resultaten over beste N -term benaderingen.

Date: 30 augustus 2006.

Daarna beschrijven we hoe uit een, met betrekking tot de energie-norm, lineair convergente iteratie een optimaal convergent algoritme geconstrueerd kan worden. We geven bewijzen van de meest fundamentele eigenschappen, alsmede verwijzingen naar relevante literatuur.

In hoofdstuk 3 (*Adaptive Galerkin methods*) wordt een adaptieve waveletmethode geconstrueerd voor het oplossen van lineaire operatorvergelijkingen. Deze methode is een variant van de methode uit [Math. Comp., 70:27–75, 2001] zonder de terugkerende *coarsening* van de iteranden. We zullen aantonen dat deze methode desalniettemin optimale computationele complexiteit heeft. Numerieke resultaten voor een eenvoudig model probleem geven aan dat de nieuwe methode efficiënter is dan de bestaande methode.

In hoofdstuk 4 (*Using polynomial preconditioners*) onderzoeken we de mogelijkheid om polynomiale preconditioneers te gebruiken in de context van adaptieve waveletmethoden. We introduceren een versie van een gepreconditioneerde adaptieve waveletmethode en tonen aan dat deze optimale computationele complexiteit heeft.

In hoofdstuk 5 (*Adaptive algorithm for nonsymmetric and indefinite elliptic problems*) passen we het adaptieve waveletalgoritme uit hoofdstuk 3 aan zodat het behalve op zelfgeadjungeerde elliptische operatoren, ook direct toepasbaar is, d.w.z. zonder het vormen van normaalvergelijkingen, op operatoren van de vorm $L = A + B$, waar A zelfgeadjungeerd elliptisch is, en B compact (aangenomen dat de resulterende operatorvergelijking goedgesteld is). We tonen aan dat de methode optimale computationele complexiteit heeft.

Met het doel om een verdere kwantitatieve verbetering te bewerkstelligen, introduceren we in hoofdstuk 6 (*Adaptive algorithm with truncated residuals*) een nieuwe klasse van adaptieve waveletalgoritmen voor het oplossen van elliptische operatorvergelijkingen, en bewijzen we dat deze optimale complexiteit hebben, aangenomen dat de stijfheidsmatrix aan een zekere eigenschap voldoet. Deze aanname wordt gecontroleerd voor elliptische differentiaaloperatoren.

In hoofdstuk 7 (*Computability of differential operators*) beperken we ons tot differentiaaloperatoren en ontwikkelen we een numeriek integratieschema dat de elementen van de stijfheidsmatrix berekent binnen een tolerantie die consistent is met de approximatiefout, terwijl in elke kolom de gemiddelde computationele kosten per element slechts $\mathcal{O}(1)$ zijn. Bijgevolg kunnen we concluderen dat het “volledig discrete” adaptieve waveletalgoritme optimale computationele complexiteit heeft.

In hoofdstuk 8 (*Computability of singular integral operators*) bewijzen we een analoog resultaat voor singuliere integraaloperatoren door de computationele kosten zorgvuldig te verdelen over de matrixelementen en efficiënte kwadratuurschema's te kiezen.

Hoofdstuk 9 (*Conclusion*) bevat een samenvatting en beschouwing van de behandelde onderwerpen. Ook worden enkele suggesties voor verder onderzoek gedaan.