



RAPPORT DE STAGE DE RECHERCHE

**Trinômes, formes modulaires et espaces
quadratiques**
Encadrant : Henri DARMON

27 août 2022

—
Simon DREYER



REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier mon tuteur de stage M. Henri Darmon, professeur à l'université de McGill qui a préparé mon stage et m'a encadré pendant ces 16 semaines à Montréal. Il a su me donner un sujet de stage passionnant qui convenait tout à fait avec mes envies. Je le remercie d'avoir suivi avec une motivation contagieuse mes avancées et de m'avoir aiguillé habilement quand je me retrouvais dans une impasse. Il a su me donner goût à la recherche en mathématiques grâce à son intérêt et son optimisme constant au sujet de mon travail. Ce fut particulièrement agréable de l'avoir en tuteur de stage.

Je remercie ensuite M. Eyal Goren et M. Patrick Allen, professeurs à McGill qui ont organisé avec M. Henri Darmon des réunions hebdomadaires pour présenter les avancements des travaux de recherche. Leurs conseils et pistes furent également très utiles.

Je remercie aussi M. Benoît Stroh, professeur à l'Ecole Polytechnique à la fois pour m'avoir aidé à la fois à trouver un stage sur un sujet qui m'intéressait et à la fois pour sa réactivité à chaque fois que j'ai eu besoin de lui. Que ce soit pour des questions ou des demandes de documents administratifs.

Je tiens également à remercier M. Jason Stillmann, Graduate Program Coordinator au département de Maths et Statistiques de l'université McGill, qui fut mon contact RH pendant la phase administrative du stage et sans qui je n'aurais pas pu me rendre au Canada.

Je remercie enfin Carl, Antoine et Sam, mes camarades de stage, pour leur intérêt pour mon travail durant nos réunions hebdomadaires et pour la bonne humeur qu'ils ont apportée durant ces 16 semaines.

INTRODUCTION

Ce travail se positionne dans la continuité de l'article de Don Zagier "From quadratic functions to modular functions". [11] Dans cet article, l'auteur étudie une fonction en apparence compliquée : la fonction $A(x)$.

Définition 0.0.1.

$$A(x) = \sum_{\substack{a,b,c \in \mathbb{Z} \\ b^2 - 4ac = 5 \\ a < 0 < ax^2 + bx + c}} ax^2 + bx + c$$

Il montre que cette fonction possède des propriétés totalement inattendues.

Théorème 1.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad A(x) = 2$$

Zagier explique à la fin de son article que la raison pour laquelle cette fonction est constante est qu'il n'y a pas de formes cuspidales non triviales de poids 4. Cette raison semble au moins aussi étonnante que la constance de la fonction.

Dans ce rapport nous commencerons par étudier cette fonction $A(x)$ et les autres fonctions qui sont naturelles à définir en suivant la ligne directrice de l'article de Zagier. Nous montrerons qu'elle est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et nous nous intéresserons au comportement d'une fonction plus générale.

Définition 0.0.2.

$$F_{k,D}(x) = \sum_{\substack{a,b,c \in \mathbb{Z} \\ b^2 - 4ac = D \\ a < 0 < ax^2 + bx + c}} (ax^2 + bx + c)^{k-1}$$

Dans le deuxième chapitre nous nous attellerons à la démonstration des résultats observés dans le premier chapitre. En outre nous ferons le lien entre les fonctions $F_{k,D}$ et les formes modulaires. Une fois encore nous suivrons globalement la progression de la fin de l'article de Zagier [11].

A partir du troisième chapitre nous cherchons à donner de nouveaux résultats liés aux fonctions de Zagier.

Dans le chapitre 3, nous étudions l'ensemble $E(x)$ des polynômes qui apparaissent dans la somme $A(x)$.

Définition 0.0.3.

$$E(x) = \left\{ P(X) = aX^2 + bX + c \in \mathbb{Z}[X] \left| \begin{array}{l} a < 0 \\ ax^2 + bx + c > 0 \\ b^2 - 4ac = 5 \end{array} \right. \right\}$$

Nous montrerons que ces ensembles sont en fait étroitement liés à des symboles modulaires. Cela nous permettra de donner une description suffisamment précise de ces $E(x)$ afin de les générer avec un programme informatique en temps quasi-constant.

Dans le quatrième chapitre nous montrerons en quoi les objets avec lesquels nous travaillons sont tous liés à des espaces quadratiques de signature $(2, 1)$. Nous chercherons à retrouver l'expression de la fonction $A(x)$ dans le monde d'un tel espace quadratique. Cela nous permettra, en faisant le même travail pour des espaces quadratiques de signatures différentes, de trouver d'autres fonctions avec des comportements aussi surprenants que ceux de la fonction $A(x)$.

Nous concluons notre travail au chapitre 5 en donnant d'autres généralisations des phénomènes et des pistes d'exploration que nous n'avons pas eu le temps de traiter et qui pourraient faire l'objet de travaux futurs.

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements	2
Introduction	3
1 Sommes de trinômes	7
1.1 La fonction $A(x)$	7
1.2 Discriminant quelconque	9
1.3 Somme de cubes	11
1.4 Somme de puissances 5	13
1.5 Somme de puissance quelconque	17
2 Preuves et formes modulaires	19
2.1 Démonstrations élémentaires	19
2.1.1 Constance de A_D	19
2.1.2 Démonstration du théorème 6	21
2.1.3 Cas où D est un carré	22
2.2 Lien avec les formes modulaires	23
2.2.1 Généralités sur les formes modulaires	23
2.2.2 Démonstration du théorème 6	25
2.3 Formes modulaires de poids demi-entier	28
3 Symboles modulaires et programmation	33
3.1 L'ensemble $E_D(x)$	33
3.1.1 Finitude	33
3.1.2 Action de $SL_2(\mathbb{Z})$	34
3.1.3 Lien avec les fractions continues	35
3.2 Algorithme de calcul de $E_D(x)$	37
3.2.1 Symboles modulaires	37
3.2.2 Théorème de structure	40
3.3 Compléments	43
3.3.1 Cardinalité	43
3.3.2 Continuité de $F_{k,D}$	45
4 Espaces quadratiques	47
4.1 Liens avec la signature $(2, 1)$	47
4.1.1 Définition	47
4.1.2 Groupe de spin	48
4.1.3 Espace symétrique	49
4.1.4 Lien avec la fonction $A(x)$	51
4.2 Espace quadratique de signature $(3, 1)$	52

4.2.1	Groupe de spin	52
4.2.2	Espace symétrique	53
4.2.3	Généralisation de la fonction $A(x)$	54
4.3	Généralisation des résultats	55
4.3.1	Constance	55
4.3.2	Corps quadratique imaginaire	57
4.3.3	Symboles modulaires	58
5	Pistes d'exploration et conclusion	60
5.1	Vision géométrique	60
5.2	Application à la physique?	62
5.3	Conclusion	63

1

SOMMES DE TRINÔMES

1.1 LA FONCTION $A(x)$

Nous commençons par construire une fonction extrêmement simple que nous allons étudier dans toute la suite du rapport. On commence par choisir un entier, prenons 5 par exemple. On considère ensuite le sous-ensemble des polynômes à coefficients entiers de discriminant 5 :

Définition 1.1.1.

$$E(x) = \left\{ P(X) = aX^2 + bX + c \in \mathbb{Z}[X] \left| \begin{array}{l} a < 0 \\ ax^2 + bx + c > 0 \\ b^2 - 4ac = 5 \end{array} \right. \right\}$$

Cet ensemble est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$. Il contient les trinômes de discriminant 5 avec un coefficient dominant négatif et dont la fonction polynomiale associée est positive en x . On est maintenant en mesure de définir la fonction $A(x)$:

Définition 1.1.2.

$$A(x) = \sum_{P \in E(x)} P(x) = \sum_{\substack{\text{disc}(P)=5 \\ P(x) > 0 > P(\infty)}} P(x) = \sum_{\substack{a, b, c \in \mathbb{Z} \\ b^2 - 4ac = 5 \\ a < 0}} \max(0, ax^2 + bx + c)$$

Cette fonction semble au premiers abords bien mystérieuse et il n'est même pas clair de voir si elle est bien définie. Nous montrons ici que la somme est bien convergente pour x rationnel et nous montrerons plus tard en partie 3 que cette somme converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Proposition 1.1.3. *Si $x \in \mathbb{Q}$ alors l'ensemble $E(x)$ est fini.*

Démonstration. Nous proposons une démonstration plus générale en prenant une valeur de discriminant D quelconque. Pour démontrer la proposition il faut prendre $D = 5$.

Soit $P = aX^2 + bX + c \in E(x)$. On a alors que :

$$\begin{aligned} D &= b^2 - 4ac = b^2 - 4a(ax^2 + bx + c) + 4abx + 4a^2x^2 \\ &= (2ax + b)^2 + 4|a||ax^2 + bx + c| \end{aligned}$$

Ce calcul montre d'une part que $(2ax + b)^2 < D$ et donc que b se trouve dans la boule de centre $-2ax$ et de rayon \sqrt{D} . Et d'autre part, si $x = \frac{p}{q}$ on a :

$$|a| = \frac{D - (2a\frac{p}{q} + b)^2}{4|a(\frac{p}{q})^2 + b\frac{p}{q} + c|} = \frac{Dq^2 - (2ap + bq)^2}{4|ap^2 + bpq + cq^2|} < \frac{Dq^2}{4}$$

Donc le coefficient a ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs. Et à a fixé, on a vu que b ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs et enfin l'équation du discriminant impose la valeur de c lorsque a et b sont fixés. Donc il ne peut y avoir qu'un nombre fini de polynômes dans $E(\frac{p}{q})$. \square

Nous avons vu dans cette preuve que, à coefficient directeur a fixé, le coefficient b doit toujours se trouver à au plus une distance $\sqrt{D} = \sqrt{5}$ de $-2ax$. Nous pouvons exploiter ce résultat pour établir un algorithme naïf qui calcule les premiers termes de la somme $A(x)$.

```
def A(x):
    somme = 0
    for a in range(-1, -10000, -1):
        for b in range(int(-2*a*x - sqrt(5)), int(-2*a*x + sqrt(5)) + 1):
            if ((b**2 - 5)%(4*a) == 0):
                c = (b**2 - 5) // (4*a)
                valeur = a*x*x + b*x + c
                if (valeur > 0):
                    somme += valeur
    return somme
```

Grâce à cet algorithme nous sommes en mesure de calculer les valeurs de la fonction $A(x)$ pour des rationnels simples et également de donner une bonne approximation de la valeur de la fonction pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exemple 1.1.4. Dans l'exemple ainsi que dans tout le rapport, nous utiliserons la notation abrégée $[a, b, c]$ pour désigner le polynôme $P = aX^2 + bX + c$.

E(0)	P(0)	A(0)
$[-1, -1, 1]$	1	2
$[-1, 1, 1]$	1	
$E(\frac{2}{3})$	$P(\frac{2}{3})$	$A(\frac{2}{3})$
$[-1, 1, 1]$	$\frac{11}{9}$	2
$[-1, 3, -1]$	$\frac{5}{9}$	
$[-5, 5, -1]$	$\frac{1}{9}$	
$[-11, 15, -5]$	$\frac{1}{9}$	

$E(\sqrt{2})$	$P(\sqrt{2})$	$A(\sqrt{2})$
$[-1, 1, 1]$	0.4142	2
$[-1, 3, -1]$	1.2426	
$[-1, 5, -5]$	0.0710	
$[-5, 15, -11]$	0.2132	
$[-11, 29, -19]$	0.0121	
$[-31, 87, -61]$	0.0365	
$[-59, 169, -121]$	0.0020	
$[-179, 507, -359]$	0.0062	
$[-349, 985, -695]$	0.0003	
...	...	

TABLE 1 – Quelques valeurs de $A(x)$

De manière surprenante, dans les trois exemples la valeur de $A(x)$ semble être toujours égale à 2. Plus précisément, il semble que $A(x)$ soit strictement égale à 2 pour les rationnels et lorsque x est irrationnel la somme $A(x)$ a l'air infinie et semble converger vers 2 assez rapidement. Nous nous intéresserons davantage à la vitesse de convergence en partie 3.

Théorème 2. *La fonction $A(x)$ est constante égale à 2.*

La démonstration de ce théorème sera faite en partie 2.

1.2 DISCRIMINANT QUELCONQUE

Au début de la section précédente nous avons choisi de manière totalement arbitraire le nombre 5 comme discriminant des trinômes que l'on somme. En réalité on peut définir une telle fonction pour tout discriminant D .

Définition 1.2.1. Soit $D \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on définit :

$$E_D(x) = \left\{ P(X) = aX^2 + bX + c \in \mathbb{Z}[X] \left| \begin{array}{l} a < 0 \\ ax^2 + bx + c > 0 \\ b^2 - 4ac = D \end{array} \right. \right\}$$

et on définit ensuite la fonction A_D par :

$$A_D(x) = \sum_{P \in E_D(x)} P(x) = \sum_{\substack{disc(P)=D \\ P(x) > 0 > P(\infty)}} P(x) = \sum_{\substack{a,b,c \in \mathbb{Z} \\ b^2 - 4ac = D \\ a < 0}} \max(0, ax^2 + bx + c)$$

Il est alors naturel de se demander s'il existe d'autres valeurs de D pour lesquelles la fonction A_D est encore constante.

Remarque 1.2.2. Lorsque $D \equiv 2, 3 \pmod{4}$ la fonction A_D est constante égale à 0 de manière triviale puisqu'il n'existe aucun trinôme à coefficients entiers de discriminant D . En effet pour tout $a, b, c \in \mathbb{Z}$ on a $b^2 - 4ac \equiv b^2 \pmod{4} \equiv 0, 1 \pmod{4}$.

Exemple 1.2.3.

$E_8(0)$	$P(0)$	$A_8(0)$	$E_8(\frac{1}{2})$	$P(\frac{1}{2})$	$A_8(\frac{1}{2})$	$E_8(\frac{1}{3})$	$P(\frac{1}{3})$	$A_8(\frac{1}{3})$
$[-1, -2, 1]$	1	5	$[-1, 0, 2]$	$\frac{7}{4}$	5	$[-1, -2, 1]$	$\frac{2}{9}$	5
$[-1, 0, 2]$	2		$[-1, 2, 1]$	$\frac{7}{4}$		$[-1, 0, 2]$	$\frac{17}{9}$	
$[-1, 2, 1]$	1		$[-2, 0, 1]$	$\frac{1}{2}$		$[-1, 2, 1]$	$\frac{14}{9}$	
$[-2, 0, 1]$	1		$[-2, 4, -1]$	$\frac{1}{2}$		$[-2, 0, 1]$	$\frac{7}{9}$	
			$[-7, 6, -1]$	$\frac{1}{4}$		$[-2, 4, -1]$	$\frac{1}{9}$	
			$[-7, 8, -2]$	$\frac{1}{4}$		$[-7, 6, -1]$	$\frac{2}{9}$	
						$[-14, 8, -1]$	$\frac{1}{9}$	
						$[-17, 12, -2]$	$\frac{1}{9}$	

TABLE 2 – Quelques valeurs de $A_8(x)$

A la suite de cet exemple il semble que la fonction A_8 soit elle aussi constante, mais cette fois-ci égale à 5. Donc de manière étonnante la fonction $A = A_5$ n'est pas la seule à être constante. En réalité presque toutes les fonctions A_D le sont.

Théorème 3. Soit $D \in \mathbb{N}$ qui n'est pas un carré. Il existe un entier α_D tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad A_D(x) = \alpha_D \quad (1.1)$$

Ce théorème, généralisation du théorème 2 sera démontré en partie 2.

Exemple 1.2.4. On donne ici quelques valeurs de cette constante α_D pour des valeurs de D non carrées et non congrues à 0 ou 1 modulo 4.

D	5	8	12	13	17	20
α_D	2	5	10	10	20	22

TABLE 3 – Quelques valeurs de α_D

En réalité on a une formule pour la valeur de l'entier α_D .

Proposition 1.2.5.

$$\alpha_D = \sum_{\substack{b \in \mathbb{Z} \\ |b| < \sqrt{D} \\ b \equiv D [2]}} \sigma_1\left(\frac{D - b^2}{4}\right) \quad (1.2)$$

où $\sigma_1(n) = \sum_{d|n} d$

Démonstration. Comme A_D est constante, calculer α_D revient à calculer $A_D(0)$.

$$\alpha_D = A_D(0) = \sum_{P=[a,b,c] \in E_D(0)} P(0) = \sum_{\substack{a,b,c \in \mathbb{Z} \\ a < 0 < c = P(0) \\ b^2 - 4ac = D}} c = \sum_{\substack{a,b,c \in \mathbb{Z} \\ a < 0 < c \\ -ac = \frac{D-b^2}{4}}} c$$

Les conditions de la somme imposent $-ac \in \mathbb{N}^*$. Or la quantité $\frac{D-b^2}{4}$ est dans \mathbb{N}^* si et seulement si $|b| < \sqrt{D}$ et $b \equiv D \pmod{2}$. Donc il vient :

$$\alpha_D = \sum_{\substack{b \in \mathbb{Z} \\ |b| < \sqrt{D} \\ b \equiv D \pmod{2}}} \sum_{\substack{a,c \in \mathbb{Z} \\ a < 0 < c \\ -ac = \frac{D-b^2}{4}}} c = \sum_{\substack{b \in \mathbb{Z} \\ |b| < \sqrt{D} \\ b \equiv D \pmod{2}}} \sigma_1\left(\frac{D-b^2}{4}\right)$$

□

1.3 SOMME DE CUBES

Nous sommes partis d'une fonction A étrange aux premiers abords qui se trouve avoir une propriété remarquable. Puis nous avons cherché à généraliser le résultat en prenant un discriminant quelconque. En tant que mathématiciens nous cherchons maintenant à généraliser davantage en regardant si le phénomène de constance se préserve si on essaye de sommer une puissance de $P(x)$ différente de 1.

Définition 1.3.1. Soit $x \in \mathbb{R}$ on définit :

$$B(x) = \sum_{P \in E(x)} P(x)^3 = \sum_{\substack{a,b,c \in \mathbb{Z} \\ b^2 - 4ac = 5 \\ a < 0}} \max(0, (ax^2 + bx + c)^3)$$

Remarque 1.3.2. On considère la puissance 3 et non la puissance 2 car l'expression de droite de la définition mènerait à une somme divergente pour tout x .

Il est aisé de calculer des valeurs de $B(x)$ avec le programme naïf déjà fait pour $A(x)$ car la partie complexe du calcul est de déterminer $E(x)$.

Exemple 1.3.3.

$E(0)$	$P(0)^3$	$B(0)$	$E(\sqrt{2})$	$P(\sqrt{2})^3$	$B(\sqrt{2})$
$[-1, -1, 1]$	1	2	$[-1, 1, 1]$	0.0711	2
$[-1, 1, 1]$	1		$[-1, 3, -1]$	1.9188	
$E(\frac{2}{3})$	$P(\frac{2}{3})^3$	$B(\frac{2}{3})$	$[-1, 5, -5]$	0.0003	
$[-1, 1, 1]$	$\frac{1331}{729}$	2	$[-5, 15, -11]$	0.0097	
$[-1, 3, -1]$	$\frac{125}{729}$		$[-11, 29, -19]$	0.000002	
$[-5, 5, -1]$	$\frac{1}{729}$		$[-31, 87, -61]$	0.000049	
$[-11, 15, -5]$	$\frac{1}{729}$		

TABLE 4 – Quelques valeurs de $B(x)$

Avec ces exemples un nouveau miracle se produit, la fonction B semble elle aussi être constante égale à 2. Et en effet il est possible de le démontrer, et nous le montrerons en partie 2.

Comme précédemment on peut généraliser cela à toutes les valeurs de discriminant $D \in \mathbb{N}$.

Définition 1.3.4. Pour $D \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose :

$$B_D(x) = \sum_{P \in E_D(x)} P(x)^3 = \sum_{\substack{a,b,c \in \mathbb{Z} \\ b^2 - 4ac = D \\ a < 0}} \max(0, (ax^2 + bx + c)^3)$$

Théorème 4. Soit $D \in \mathbb{N}$ qui n'est pas un carré. Il existe un entier β_D tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad B_D(x) = \beta_D \quad (1.3)$$

La preuve de ce théorème sera faite en section 2.

Exemple 1.3.5.

D	5	8	12	13	17	20
β_D	2	11	42	58	164	274

TABLE 5 – Quelques valeurs de β_D

Notons que en général on a $\alpha_D \neq \beta_D$ le fait que $A(x) = B(x)$ était simplement une particularité du cas $D = 5$. Comme pour les entiers α_D , on dispose d'une formule arithmétique pour les constantes β_D .

Proposition 1.3.6.

$$\beta_D = \sum_{\substack{b \in \mathbb{Z} \\ |b| < \sqrt{D} \\ b \equiv D [2]}} \sigma_3\left(\frac{D - b^2}{4}\right) \tag{1.4}$$

où $\sigma_3(n) = \sum_{d|n} d^3$

Cette formule est très proche de celle des α_D , sa démonstration consiste d'ailleurs à faire exactement les mêmes manipulations de sommes.

1.4 SOMME DE PUISSANCES 5

Il semble que la voie d'exploration consistant à augmenter la puissance soit prolifique. Nous avons donc envie de continuer et de regarder si le phénomène subsiste aussi à la puissance 5.

Définition 1.4.1. Soit $x \in \mathbb{R}$ on pose :

$$C(x) = \sum_{P \in E(x)} P(x)^5 = \sum_{\substack{a, b, c \in \mathbb{Z} \\ b^2 - 4ac = 5 \\ a < 0}} \max(0, (ax^2 + bx + c)^5)$$

Et plus généralement :

Définition 1.4.2. Pour $D \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose :

$$C_D(x) = \sum_{P \in E_D(x)} P(x)^5 = \sum_{\substack{a, b, c \in \mathbb{Z} \\ b^2 - 4ac = D \\ a < 0}} \max(0, (ax^2 + bx + c)^5)$$

Si on suit les phénomènes précédents, on s'attend à ce que C_D soit constante égale à une constante qui s'exprime de la même manière que α_D et β_D mais en utilisant la fonction σ_5 .

Exemple 1.4.3.

$E(0)$	$P(0)^5$	$C(0)$
$[-1, -1, 1]$	1	2
$[-1, 1, 1]$	1	

$E(\frac{1}{2})$	$P(\frac{1}{2})^5$	$C(\frac{1}{2})$
$[-1, -1, 1]$	$\frac{1}{1024}$	≈ 3.055
$[-1, 1, 1]$	$\frac{3125}{1024}$	
$[-1, 3, -1]$	$\frac{1}{1024}$	
$[-5, 5, -1]$	$\frac{1}{1024}$	

TABLE 6 – Quelques valeurs de $C(x)$

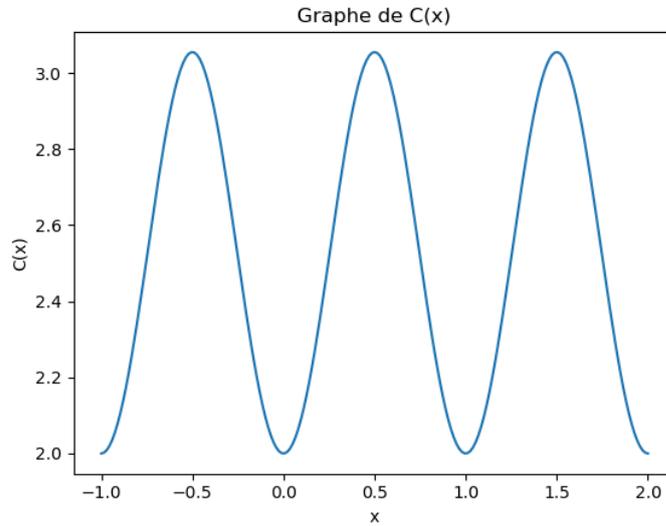


FIGURE 1 – Allure de C

Nous sommes face à une nouvelle surprise puisque pour une fois la fonction n'est pas constante. Et cela se vérifie pour toutes les fonctions C_D . Toutefois, même si elles ne sont pas constantes, ces fonctions conservent une certaine régularité.

Proposition 1.4.4. *Les fonctions C_D sont paires et 1-périodiques.*

Démonstration. La démonstration repose simplement sur un changement de variable. On utilise l'expression avec le $\max(0, \dots)$. Pour la parité :

$$C_D(-x) = \sum_{\substack{a,b,c \in \mathbb{Z} \\ b^2 - 4ac = D \\ a < 0}} \max(0, (ax^2 - bx + c)^5) = \sum_{\substack{a,b_2,c \in \mathbb{Z} \\ b_2^2 - 4ac = D \\ a < 0}} \max(0, (ax^2 + b_2x + c)^5) = C_D(x)$$

où on a fait le changement de variable $b_2 = -b$.

Pour la 1-périodicité :

$$C_D(x+1) = \sum_{\substack{a,b,c \in \mathbb{Z} \\ b^2 - 4ac = D \\ a < 0}} \max(0, (a(x+1)^2 + b(x+1) + c)^5) = \sum_{\substack{a,b_2,c_2 \in \mathbb{Z} \\ b_2^2 - 4ac_2 = D \\ a < 0}} \max(0, (ax^2 + b_2x + c_2)^5) = C_D(x)$$

où on a fait le changement de variable $\begin{cases} b_2 = 2a + b \\ c_2 = a + b + c \end{cases}$. On vérifie aisément qu'il s'agit d'un changement de variable bijectif qui préserve le discriminant $b^2 - 4ac$. \square

Les fonctions C_D oscillent de manière 1-périodique en ayant pour valeur extrême leur valeur en 0 qui se trouve être un entier γ_D avec :

$$\gamma_D = \sum_{\substack{b \in \mathbb{Z} \\ |b| < \sqrt{D} \\ b \equiv D \pmod{2}}} \sigma_5\left(\frac{D - b^2}{4}\right) \quad (1.5)$$

où $\sigma_5(n) = \sum_{d|n} d^5$ Ces dernières remarques invitent à étudier le réduit de C_D .

Définition 1.4.5. On définit le réduit de C_D par :

$$C_D^0(x) = C_D(x) - C_D(0) = C_D(x) - \gamma_D$$

Exemple 1.4.6. Observons l'allure des fonctions C_D^0 .

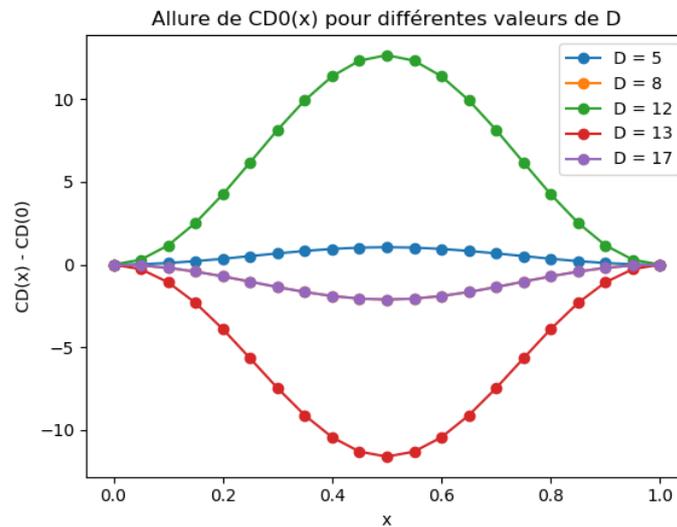
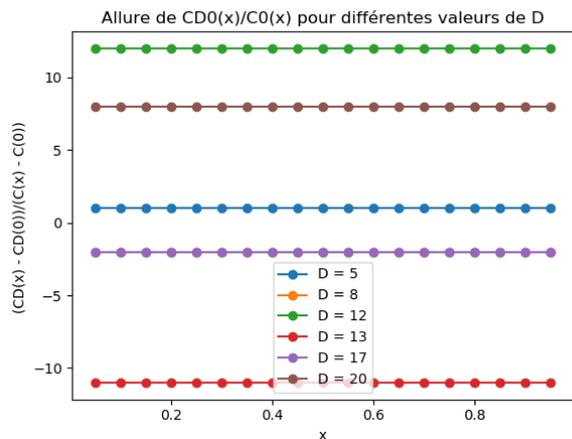


FIGURE 2 – Allure de C_D^0 pour différents discriminants D

Nous remarquons que toutes ces allures semblent être les mêmes à un facteur multiplicatif près. En pratique nous trouvons que les rapports $\frac{C_D^0(x)}{C_5^0(x)} = \frac{C_D^0(x)}{C_5^0(x)}$ sont constants égaux à des entiers que nous appellerons δ_D .



D	δ_D
5	1
8	-2
12	12
13	-11
17	-2
20	8

TABLE 7 – Quelques valeurs de δ_D

FIGURE 3 – Rapports de C_D^0 sur C_5^0

Théorème 5. Pour $D \in \mathbb{N}$ qui n'est pas un carré, il existe deux entiers γ_D et δ_D tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad C_D(x) = \gamma_D + \delta_D \phi(x)$$

où ϕ est une fonction qui ne dépend que de x .

La preuve sera faite en partie 2.

Remarque 1.4.7. Lorsqu'on considère la somme des puissances 5, la magie se brise, la fonction n'est plus miraculeusement constante. Toutefois tous les fonctions C_D appartiennent à un même espace vectoriel de dimension 2 constitué de la fonction ϕ et de la fonction constante égale à 1.

La fonction ϕ est en fait simplement la fonction $C^0 = C_5 - \gamma_5$. Nous donnons le graphe de cette fonction 1-périodique que nous avons réduit à ϕ^0 en lui retranchant sa valeur moyenne.

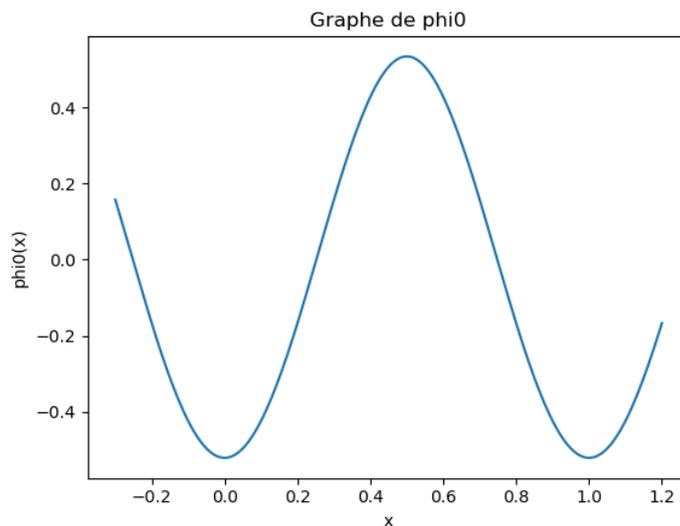


FIGURE 4 – Allure de ϕ^0

Cette figure semble être une fonction périodique très régulière. En réalité ce n'est pas vraiment le cas car si elle est bien 1-périodique (car égale à $C_5 - \gamma_5$) elle n'est pas de classe C^∞ .

Proposition 1.4.8. On a $\phi \notin C^\infty$ et même $\phi \notin C^{10}$.

Démonstration. Par l'absurde, supposons que $\phi \in C^{10}$. On regarde la valeur de $\phi^{(10)}$ en $x = \frac{n}{k} \in \mathbb{Q}$. Les développements limités nous donnent la formule :

$$\phi^{(10)}(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{10} \binom{10}{n} (-1)^n (kq)^{10} \phi\left(x + \frac{n}{kq}\right)$$

Or en remplaçant x par $\frac{p}{q}$:

$$\begin{aligned} (kq)^{10} \phi\left(x + \frac{n}{kp}\right) &= \sum_{\substack{a,b,c \in \mathbb{Z} \\ b^2 - 4ac = 5 \\ a < 0}} \max\left(0, (kq)^{10} \left(a \left(\frac{kp+n}{kq}\right)^2 + b \frac{kp+n}{kq} + c\right)^5\right) - \gamma_5 \\ &= \sum_{\substack{a,b,c \in \mathbb{Z} \\ b^2 - 4ac = 5 \\ a < 0}} \max\left(0, (a(pk+n)^2 + b(pk+n)kq + c(kq)^2)^5\right) - \gamma_5 \end{aligned}$$

On a $p, q, n, k, \gamma_5 \in \mathbb{Z}$ donc $\phi^{(10)}(x) \in \mathbb{Z}$. Cela est vrai pour tout $x \in \mathbb{Q}$, donc par continuité, on a que $\phi^{(10)}$ est constante. Donc la fonction ϕ doit être un polynôme de degré au plus 10. Or ϕ est aussi 1-périodique donc cela impose que ϕ doit être constante. C'est absurde car on a vu plus tôt que ce n'est pas le cas. \square

1.5 SOMME DE PUISSANCE QUELCONQUE

Nous continuons notre exploration en généralisant encore. Cette fois nous considérons toutes les puissances impaire.

Définition 1.5.1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ pair. Pour $D \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose :

$$F_{k,D}(x) = \sum_{P \in E_D(x)} P(x)^{k-1} = \sum_{\substack{a,b,c \in \mathbb{Z} \\ b^2 - 4ac = D \\ a < 0}} \max\left(0, (ax^2 + bx + c)^{k-1}\right)$$

Nous ne considérons que les k pairs ici pour avoir une somme de puissances impaire et donc pour que la somme de droite converge.

Remarque 1.5.2. Nous pouvons déjà voir avec cette expression que les fonctions $F_{k,D}$ sont toutes paires et 1-périodiques. Puisque la démonstration de la proposition 1.4.4 ne reposait que sur des changements de variables qui restent valides ici.

Nous donnons à présent un théorème général qui englobe tous les théorèmes vus jusqu'à présent et qui sera démontré dans la partie 2 du rapport.

Théorème 6. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ pair, il existe des fonctions $f_1, f_2, \dots, f_{\lfloor \frac{k}{6} \rfloor + 1}$ telles que pour tout $D \in \mathbb{N}$ non carré :

$$F_{k,D} \in \text{Vect}(f_1, f_2, \dots, f_{\lfloor \frac{k}{6} \rfloor + 1})$$

On a donc que, à k fixé, toutes les fonctions $F_{k,D}$ sont dans un même espace vectoriel de dimension $\lfloor \frac{k}{6} \rfloor + 1$. Nous verrons que cette dimension mystérieuse est en fait liée à la dimension de l'espace des formes cuspidales de poids $2k$.

Remarque 1.5.3. Pour $k = 2, 4$ l'espace est de dimension 1 et on retrouve les théorèmes 3 et 4. Tandis que pour $k = 6$, l'espace est de dimension 2 et on retrouve le résultat du théorème 5.

2

PREUVES ET FORMES MODULAIRES

2.1 DÉMONSTRATIONS ÉLÉMENTAIRES

Nous proposons dans cette section des démonstrations des théorèmes 3 puis 6 n'utilisant pas d'outils mathématiques particulièrement sophistiqués. Ces démonstrations nous amèneront à trouver les termes correctifs à ajouter aux fonctions $F_{k,D}$ lorsque D est un carré pour que le théorème 6 reste valide.

2.1.1 • CONSTANCE DE A_D

Nous commençons par proposer une démonstration du théorème 3. La démonstration repose sur le calcul d'une fonction que nous définissons ici.

Définition 2.1.1.

$$P_{2,D}(x) = x^2 A_D\left(\frac{1}{x}\right) - A_D(x) \quad (2.1)$$

Lemme 2.1.2.

$$P_{2,D} = A_D(0) \cdot X^2 - A_D(0)$$

Démonstration. On utilise l'expression de A_D sous forme de $\sum_{\substack{a,b,c \in \mathbb{Z} \\ b^2 - 4ac = D \\ a < 0}} \max(0, ax^2 + bx + c)$ pour calculer $P_{2,D}$. Pour alléger les notations par la suite, nous omettrons d'écrire les conditions $a, b, c \in \mathbb{Z}$ et $b^2 - 4ac = D$ bien qu'elles soient toujours présentes.

$$\begin{aligned}
P_{2,D}(x) &= x^2 \sum_{a<0} \max(0, \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + c) - \sum_{a<0} \max(0, ax^2 + bx + c) \\
&= \sum_{a<0} \max(0, a + bx + cx^2) - \sum_{a<0} \max(0, ax^2 + bx + c) \\
&= \sum_{c<0} \max(0, c + bx + ax^2) - \sum_{a<0} \max(0, ax^2 + bx + c) \\
&= \sum_{c<0<a} \max(0, ax^2 + bx + c) - \sum_{a<0<c} \max(0, ax^2 + bx + c) \\
&= \sum_{c<0<a} \max(0, ax^2 + bx + c) + \sum_{a<0<c} \min(0, -ax^2 - bx - c) \\
&= \sum_{c<0<a} \max(0, ax^2 + bx + c) + \sum_{c<0<a} \min(0, ax^2 + bx + c) \\
&= \sum_{c<0<a} (ax^2 + bx + c) \\
&= Ax^2 + Bx + C
\end{aligned}$$

avec

$$A = \sum_{\substack{b^2-4ac=D \\ c<0<a}} a = A_D(0) \quad B = \sum_{\substack{b^2-4ac=D \\ c<0<a}} b = 0 \quad C = \sum_{\substack{b^2-4ac=D \\ c<0<a}} c = -A_D(0)$$

□

D'après le lemme on a l'équation :

$$x^2 A_D\left(\frac{1}{x}\right) - A_D(x) = P_{2,D}(x) = A_D(0) \cdot (x^2 - 1)$$

Si on considère $A_D^0 = A_D - A_D(0)$ le réduct de A_D , on a les équations suivantes :

$$x^2 A_D^0\left(\frac{1}{x}\right) = A_D^0(x) \tag{2.2}$$

$$A_D^0(x+1) = A_D^0(x) \tag{2.3}$$

$$A_D^0(0) = 0 \tag{2.4}$$

Grâce à ces trois équations, on est capable de montrer que A_D^0 est nulle sur \mathbb{Q} . En effet grâce à un algorithme basé sur la division euclidienne, on peut ramener tout rationnel $\frac{p}{q}$ à 0 avec un nombre fini de transformations $x \mapsto x \pm 1$ et $y \mapsto \frac{1}{y}$ et inversement. Or les équations 2.2 et 2.3 montrent que ces transformations envoient un zéro de A_D^0 vers un autre. Et comme 0 est un zéro de A_D^0 d'après 2.4 on a que :

$$\forall x \in \mathbb{Q} \quad A_D^0(x) = 0$$

En admettant la continuité de la fonction A_D qui sera démontrée en partie 3, on obtient que A_D^0 est la fonction nulle et donc que $A_D = A_D(0)$ ce qui conclut la démonstration.

2.1.2 • DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 6

La démonstration du cas général commence comme la précédente.

Définition 2.1.3.

$$P_{k,D}(x) = x^{2k-2}F_{k,D}\left(\frac{1}{x}\right) - F_{k,D}(x) \quad (2.5)$$

Lemme 2.1.4.

$$P_{k,D}(x) = \sum_{\substack{b^2-4ac=D \\ c < 0 < a}} (ax^2 + bx + c)^{k-1} \quad (2.6)$$

Démonstration. La démonstration consiste à refaire exactement les mêmes manipulations de somme que dans le début de la démonstration de 2.1.2. \square

Lemme 2.1.5. $P_{k,D}$ vérifie l'équation fonctionnelle :

$$P(x+1) = P(x) + x^{2k-2}P\left(1 + \frac{1}{x}\right) \quad (2.7)$$

Remarque 2.1.6. Cette équation fonctionnelle, appelée "period equation" dans [11] est étroitement liée à l'ensemble des formes modulaires. L'auteur explicite dans l'article une bijection entre l'ensemble des solutions paires de cette équation et l'espace des formes modulaires de poids $2k$.

Démonstration. Cette preuve n'utilise que la parité et la 1-périodicité de $F_{k,D}$ vues en 1.4.4.

$$\begin{aligned} x^{2k-2}P_{k,D}\left(1 + \frac{1}{x}\right) &= x^{2k-2}\left(\frac{1}{x} + 1\right)^{2k-2}F_{k,D}\left(\frac{1}{\frac{1}{x} + 1}\right) - x^{2k-2}F_{k,D}\left(1 + \frac{1}{x}\right) \\ &= (x+1)^{2k-2}F_{k,D}\left(\frac{x}{x+1}\right) - x^{2k-2}F_{k,D}\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= (x+1)^{2k-2}F_{k,D}\left(\frac{1}{x+1}\right) - x^{2k-2}F_{k,D}\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= (x+1)^{2k-2}F_{k,D}\left(\frac{1}{x+1}\right) - x^{2k-2}F_{k,D}\left(\frac{1}{x}\right) - F_{k,D}(x+1) + F_{k,D}(x) \\ &= P_{k,D}(x+1) - P_{k,D}(x) \end{aligned}$$

\square

L'espace des solutions de l'équation fonctionnelle 2.7 est de dimension $\lfloor \frac{k}{6} \rfloor + 1$. (voir [11])

Considérons des discriminants D_1, D_2, \dots, D_n tels que $(P_{k,D_i})_{1 \leq i \leq n}$ soit une famille libre de cardinal maximal. On a donc $n \leq \lfloor \frac{k}{6} \rfloor + 1$ et pour tout $D \in \mathbb{N}$ on a des coefficients a_1, \dots, a_n tels que :

$$P_{k,D}(x) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot P_{k,D_i}(x) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot (x^{2k-2} F_{k,D_i}(\frac{1}{x}) - F_{k,D_i}(x))$$

D'où :

$$x^{2k-2} (F_{k,D}(\frac{1}{x}) - \sum_{i=1}^n a_i \cdot F_{k,D_i}(\frac{1}{x})) = F_{k,D}(x) - \sum_{i=1}^n a_i \cdot F_{k,D_i}(x)$$

On conclut ensuite de la même manière que dans 2.1.1 pour montrer que $F_{k,D}(x) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot F_{k,D_i}(x)$ sur \mathbb{Q} puis sur \mathbb{R} en admettant la continuité de $F_{k,D}$ pour le moment (qui sera démontrée en partie 3). Donc finalement

$$F_{k,D} \in Vect(F_{k,D_1}, F_{k,D_2}, \dots, F_{k,D_n}) \quad n \leq \lfloor \frac{k}{6} \rfloor + 1$$

2.1.3 • CAS OÙ D EST UN CARRÉ

Dans toute la démonstration précédente, la seule fois où nous utilisons le fait que D n'est pas un carré est dans la démonstration du lemme 2.1.4. Dans le cas où $D = m^2$ on doit tenir compte du fait que le coefficient constant c d'un polynôme de $E_D(x)$ peut tout à fait être nul, ce qui ne pouvait être le cas avant. De ce fait, des termes dus à ces effets de bord apparaissent dans le calcul et le lemme 2.1.4 n'est plus vérifié.

Il nous faut modifier la définition de $F_{k,D}$ dans le cas où D est un carré pour corriger ces effets de bords tout en conservant les propriétés de parité et de 1-périodicité nécessaires pour que $P_{k,D}$ vérifie encore la "period equation" 2.7.

On commence par introduire des notations.

Définition 2.1.7. On note \mathbb{B}_k le k -ième polynôme de Bernoulli et $\overline{\mathbb{B}_k}(x) = \mathbb{B}_k(x - \lfloor x \rfloor)$. De plus on note $F_{k,D}^*$ les fonctions $F_{k,D}$ définies sans comme en 1.5.1. Enfin on définit la fonction κ par :

$$\kappa : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{q^2} & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ avec } p \wedge q = 1 \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

On peut maintenant définir les fonctions $F_{k,D}$ "corrigées" pour les discriminants carrés.

Définition 2.1.8. Pour $D = m^2$ avec $m \in \mathbb{N}^*$ on définit :

$$F_{2,m^2}(x) = F_{2,m^2}^*(x) - \frac{1}{2} \overline{\mathbb{B}_2}(mx) + \frac{1}{2} m^2 \kappa(x) \quad (2.8)$$

$$F_{k,m^2}(x) = F_{k,m^2}^*(x) - \frac{1}{k} \overline{\mathbb{B}}_k(mx) \quad \text{pour } k > 2 \quad (2.9)$$

On vérifie que avec ces définitions, les termes de bords se compensent dans le calcul de $P_{k,D}$ de façon à ce que le lemme 2.1.4 reste vrai. Cela résulte des propriétés élémentaires des polynômes de Bernoulli et de l'équation :

$$\sum_{n \geq 1} \max(0, (t-n)^{k-1}) = \frac{\mathbb{B}_k(t) - \overline{\mathbb{B}}_k(t)}{k}$$

qui découle directement de la propriété $\mathbb{B}_n(x+1) = \mathbb{B}_n(x) + nx^{n-1}$ des polynômes de Bernoulli.

On montre également facilement que les termes correctifs sont pairs et 1-périodiques.

Ainsi le théorème 6 reste vrai dans le cas où D est un carré en prenant ces définitions.

Pour finir nous définissons $F_{k,0}$ à part afin de conserver d'autres théorèmes qui apparaissent dans [11].

Définition 2.1.9.

$$F_{k,0}(x) = \frac{1}{2} \zeta(1-k) = \frac{\mathbb{B}_k(0)}{2k} \quad (2.10)$$

Cette définition nous sera aussi utile dans la section 2.3.

2.2 LIEN AVEC LES FORMES MODULAIRES

2.2.1 • GÉNÉRALITÉS SUR LES FORMES MODULAIRES

Nous commençons par donner des définitions.

Définition 2.2.1. Soit $N \in \mathbb{N}$ on définit $\Gamma_0(N)$ le *groupe modulaire de niveau N* :

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 [N] \right\}$$

Définition 2.2.2. Soit $k, N \in \mathbb{N}$. Une *forme modulaire de poids k et de niveau N* est une fonction holomorphe f du demi plan de Poincaré \mathbb{H} dans \mathbb{C} et qui vérifie :

$$\forall z \in \mathbb{H}, \quad \forall \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma_0(N), \quad f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z) \quad (2.11)$$

et qui a un développement en série de Fourier de la forme :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n \quad \text{avec } q = e^{2\pi iz}$$

On note $\mathcal{M}_k(N)$ l'ensemble des formes modulaires de poids k et de niveau N .

Définition 2.2.3. On appelle *forme cuspidale* une forme modulaire qui vérifie

$$\lim_{\text{Im}(z) \rightarrow \infty} f(z) = 0 \quad (2.12)$$

ou de manière équivalente qui vérifie

$$a(0) = 0$$

où $a(0)$ désigne le premier terme du développement en série de Fourier de f .
On note $\mathcal{O}_k(N)$ l'ensemble des formes cuspidales de poids k et de niveau N .

Remarque 2.2.4. Dans la suite du rapport, quand nous parlerons de forme modulaire ou cuspidale sans en préciser le niveau, il sera toujours question de forme modulaire de niveau 1. De même quand nous parlerons des ensembles \mathcal{M}_k et \mathcal{O}_k il faudra les comprendre comme $\mathcal{M}_k(1)$ et $\mathcal{O}_k(1)$

Il est facile de voir que les espaces \mathcal{M}_k et \mathcal{O}_k sont des espaces vectoriels réels. Toutefois il est tout à fait remarquable de constater que ces espaces ne sont pas très grands. En effet ils sont de dimension finie.

Proposition 2.2.5. *La seule forme modulaire de poids impair est la fonction nulle.*

Démonstration. Il suffit simplement d'appliquer la condition de modularité 2.11 avec la matrice $-I_2$ pour obtenir que $f(z) = -f(z)$ pour tout $z \in \mathbb{H}$. \square

Théorème 7. *Soit $k \in \mathbb{N}$ pair. \mathcal{M}_k est un espace vectoriel de dimension finie et*

$$\dim(\mathcal{M}_k) = n_k = \begin{cases} \lfloor \frac{k}{12} \rfloor & \text{si } k \equiv 2 \pmod{12} \\ \lfloor \frac{k}{12} \rfloor + 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.13)$$

$$\dim(\mathcal{O}_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 2 \\ n_k - 1 & \text{si } k \geq 4 \end{cases} \quad (2.14)$$

Nous ne donnons pas la preuve ici, elle repose sur le comptage des zéros des formes modulaires de poids k sur leur domaine fondamental. Une intuition de preuve est donnée dans une vidéo de Borcherds en [1] et la preuve complète est traitée par Serre dans [9].

Exemple 2.2.6. Pour $k \in \mathbb{N}$ pair on définit la *série d'Eisenstein de poids k*

$$G_k(z) = \frac{\zeta(1-k)}{4\zeta(k)} \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus (0,0)} \frac{1}{(m+nz)^k} \quad (2.15)$$

Pour $k > 2$ on a que $G_k \in \mathcal{M}_k$ et son développement en série de Fourier est

$$G_k(z) = -\frac{\mathbb{B}_k}{2k} + \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{k-1}(n)q^n \quad \text{avec } q = e^{2\pi iz} \quad (2.16)$$

où $\mathbb{B}_k = \mathbb{B}_k(0)$ est le k -ième nombre de Bernoulli et $\sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{k-1}$.

2.2.2 • DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 6

Dans toute la démonstration on se donne $k \in \mathbb{N}$ un entier pair avec $k > 2$. On se fixe aussi $D \in \mathbb{N}$ qui n'est pas un carré pour s'épargner les termes correctifs introduits en 2.1.8.

Nous commençons la démonstration en introduisant une forme cuspidale donc l'expression ressemble à celle des séries de Eisenstein en 2.15

Définition 2.2.7. Pour $z \in \mathbb{H}$ on pose :

$$f_{k,D}(z) = \sum_{\substack{a,b,c \in \mathbb{Z} \\ b^2 - 4ac = D}} \frac{1}{(az^2 + bz + c)^k}$$

Proposition 2.2.8. $f_{k,D}$ est une forme cuspidale de poids $2k$.

Démonstration. La première partie de la preuve, consistant à montrer que $f_{k,D}$ est holomorphe de \mathbb{H} dans \mathbb{C} puis qu'elle satisfait la condition de modularité 2.11 avec un poids $2k$ utilise les mêmes arguments que pour montrer que $G_k \in \mathcal{M}_k$ quand on étudie les séries de Eisenstein. Nous montrons simplement la condition 2.12 qui montre que $f_{k,D}$ est cuspidale.

En posant $z = x + iy$ on a :

$$|f_{k,D}(z)| \leq \sum_{\substack{a,b,c \in \mathbb{Z} \\ b^2 - 4ac = D}} \frac{1}{|az^2 + bz + c|^k} \leq \sum_{\substack{a,b,c \in \mathbb{Z} \\ b^2 - 4ac = D}} \frac{1}{\text{Im}(az^2 + bz + c)^k} = \frac{1}{y^k} \sum_{\substack{a,b,c \in \mathbb{Z} \\ b^2 - 4ac = D}} \frac{1}{(2ax + b)^k}$$

La somme de droite est quasiment une série de Eisenstein. Une démonstration similaire à celle que l'on trouve dans l'étude des séries de Eisenstein montre qu'elle est bien définie quand $k > 2$

(notamment $(a, b) \neq (0, 0)$ car $D \neq 0$). On voit alors en qu'en faisant tendre $Im(z) = y$ vers $+\infty$ on a $f_{k,D} \rightarrow 0$. \square

On définit ensuite deux transformations sur les formes modulaires qui vont nous être utile.

Définition 2.2.9. Soit $f \in \mathcal{M}_k$. On note comme d'habitude $a(n)$ le n -ième coefficient de Fourier de f . On définit \tilde{f} l'intégrale de Eichler de f par

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^{k-1}} q^n$$

Définition 2.2.10. Soit $f \in \mathcal{M}_k$. On définit r_f le polynôme périodique de f par

$$r_f(z) = \tilde{f}(z) - z^{k-2} \tilde{f}\left(-\frac{1}{z}\right)$$

et on note r_f^+ sa partie paire.

Remarque 2.2.11. Contrairement à ce que son nom indique, le polynôme périodique de f n'est un polynôme que si f est cuspidale. Sinon c'est un polynôme mais avec un terme en $\frac{1}{z}$ en plus. Pour le voir, il suffit de calculer sa $(k-1)$ ième dérivée et d'utiliser le fait que $\tilde{f}^{(k-1)} = (2\pi i)^{k-1}(f - a(0))$. Mais dans tous les cas r_f^+ est bien un polynôme pair.

On dispose d'une autre formule de Eichler et Shimura pour r_f qui est parfois aussi utilisée comme définition.

Proposition 2.2.12. Si f est une forme cuspidale de poids $2k$ alors

$$r_f(z) = \int_0^{+i\infty} f(\tau)(\tau - z)^{2k-2} d\tau \quad (2.17)$$

Nous sommes maintenant prêts à démontrer le théorème 6.

Démonstration. On commence par appliquer la formule de Eichler et Shimura 2.17 à la forme cuspidale $f_{k,D}$:

$$r_{f_{k,D}}(x) = \int_0^{+i\infty} \sum_{b^2-4ac=D} \frac{(z-x)^{2k-2}}{(az^2+bz+c)^k} dz$$

Dans la suite nous allons faire comme si nous pouvions intégrer terme à terme. En réalité ce n'est pas le cas et des termes de bords vont apparaître. Néanmoins pour alléger les calculs et mieux voir les phénomènes qui se produisent nous continuerons comme cela pour un moment. On a donc

$$r_{f_{k,D}}(x) \approx \sum_{b^2-4ac=D} \int_0^{+i\infty} \frac{(z-x)^{2k-2}}{(az^2+bz+c)^k} dz$$

En passant à la partie paire et en faisant un changement de variable $z \mapsto -z$ on trouve :

$$r_{f_{k,D}}^+(x) \approx \frac{1}{2} \sum_{b^2-4ac=D} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{(z-x)^{2k-2}}{(az^2+bz+c)^k} dz$$

Nous utilisons ensuite le théorème des résidus pour calculer l'intégrale $\int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{(z-x)^{2k-2}}{(az^2+bz+c)^k} dz$. Le résultat va dépendre des pôles de la fonction, qui sont en réalité les racines du polynôme aX^2+bX+c de discriminant D . Si les deux racines sont des réels de même signe alors l'intégrale est nulle, sinon il faut faire un calcul de résidu pour calculer l'intégrale. On trouve ainsi :

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{(z-x)^{2k-2}}{(az^2+bz+c)^k} dz = \begin{cases} 0 & \text{si } a.c > 0 \\ -C_{k,D} \cdot (ax^2+bx+c)^{k-1} & \text{si } a.c < 0 \end{cases}$$

où $C_{k,D}$ est une constante indépendante de a, b, c . On obtient alors :

$$r_{f_{k,D}}^+(x) \approx -C_{k,D} \cdot \sum_{\substack{b^2-4ac=D \\ c < 0 < a}} (ax^2+bx+c)^{k-1}$$

On reconnaît alors la somme du calcul de $P_{k,D}(x)$ du lemme 2.1.4. On la remplace donc par la définition de $P_{k,D}$ ce qui introduit pour la première fois les fonctions $F_{k,D}$ dans le calcul.

$$r_{f_{k,D}}^+(x) \approx C_{k,D} \cdot (F_{k,D}(x) - x^{2k-2} F_{k,D}(\frac{1}{x}))$$

Comme dit plus haut, on a fait une approximation en intégrant terme à terme. En réalité, on a des termes qui s'ajoutent et le résultat exact est :

$$r_{f_{k,D}}^+(x) = C_{k,D} \cdot (F_{k,D}(x) - F_{k,D}(0) - x^{2k-2}(F_{k,D}(\frac{1}{x}) - F_{k,D}(0)))$$

On remplace ensuite $r_{f_{k,D}}^+$ par son expression dans la définition 2.2.10 pour finalement obtenir l'équation :

$$x^{2k-2}(F_{k,D}(\frac{1}{x}) - F_{k,D}(0) - \frac{1}{C_{k,D}} f_{k,D}^{\sim+}(\frac{1}{x})) = F_{k,D}(x) - F_{k,D}(0) - \frac{1}{C_{k,D}} f_{k,D}^{\sim+}(x)$$

On procède ensuite de la même manière que pour la démonstration élémentaire de la section précédente 2.1.1 pour en déduire, toujours en admettant la continuité de la fonction $F_{k,D}$, que :

$$F_{k,D}(x) = F_{k,D}(0) + \frac{1}{C_{k,D}} f_{k,D}^{\sim+}(x)$$

Pour conclure il suffit de dire que comme $f_{k,D} \in \mathcal{O}_{2k}$ d'après 2.2.8, et que $\mathcal{O}_{2k} = Vect(f_1, \dots, f_{n_{2k}-1})$ d'après le théorème 7 (avec $n_{2k} = dim(\mathcal{M}_{2k})$), on a :

$$F_{k,D} \in Vect(1, \tilde{f}_1^+, \dots, \tilde{f}_{n_{2k}-1}^+)$$

Et comme k est pair, on a nécessairement $n_{2k} = \lfloor \frac{k}{6} \rfloor$.

Pour être parfaitement exhaustif, nous avons démontré le théorème pour $k > 2$ et nous traitons le cas $k = 2$ comme pour la démonstration élémentaire de la section 2.1.1. \square

Ainsi, nous pourrions dire que la raison profonde pour laquelle les fonctions A_D et B_D de la partie 1 sont constantes est qu'il n'existe pas de formes cuspidales de poids 4 et 8.

2.3 FORMES MODULAIRES DE POIDS DEMI-ENTIER

Nous avons vu dans la section précédente qu'il existait un lien étroit entre les formes modulaires et les fonctions $F_{k,D}$ et que le théorème 6 résultait directement de la finitude de l'espace \mathcal{O}_{2k} .

Dans cette section nous revenons sur un autre lien entre les formes modulaires et les fonctions $F_{k,D}$ et tentons de l'explorer : la mystérieuse apparition des fonctions σ_{k-1} que l'on retrouve à la fois dans les formules de α_D en 1.2.5, de β_D en 1.3.6 et à la fois dans les coefficients du développement en série de Fourier des séries de Eisenstein en 2.16.

Nous commençons par généraliser les formules que l'on a observées pour α_D et β_D .

Proposition 2.3.1. *Soit $k > 2$ pair et $D \in \mathbb{N}$. Notons $n_k(D) = F_{k,D}(0)$, on a alors :*

$$\begin{aligned}
 n_k(D) &= \sum_{\substack{b \in \mathbb{Z} \\ |b| < \sqrt{D} \\ b \equiv D \pmod{2}}} \sigma_{k-1}\left(\frac{D-b^2}{4}\right) && \text{si } D \equiv 0, 1 \pmod{4} \text{ et n'est pas un carré} \\
 &= \sum_{\substack{b \in \mathbb{Z} \\ |b| < \sqrt{D} \\ b \equiv D \pmod{2}}} \sigma_{k-1}\left(\frac{D-b^2}{4}\right) - \frac{\mathbb{B}_k}{k} && \text{si } D \text{ est un carré non nul} \\
 &= -\frac{\mathbb{B}_k}{2k} && \text{si } D = 0 \\
 &= 0 && \text{si } D \equiv 2, 3 \pmod{4}
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Démonstration. Il s'agit simplement de refaire le même calcul que pour la démonstration de la formule de α_D en 1.2.5. On ajoute simplement les termes correctifs donnés en 2.1.8 lorsque D est un carré et le résultat suit. \square

Cette nouvelle notation nous suggère d'étudier la série génératrice de terme général $n_k(D)$.

Définition 2.3.2. Pour $k > 2$ pair, on pose

$$\mathcal{F}_k(z) = \sum_{D=0}^{\infty} n_k(D)q^D \quad \text{avec } q = e^{2\pi iz} \tag{2.19}$$

Calculons \mathcal{F}_k :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_k(z) &= \sum_{D \equiv 0,1 [4]} n_k(D)q^D \\
 &= \sum_{\substack{D \equiv 0,1 [4] \\ D > 0}} \left(\sum_{\substack{|b| < \sqrt{D} \\ b \equiv D [2]}} \sigma_{k-1}\left(\frac{D-b^2}{4}\right) - \delta_D \frac{\mathbb{B}_k}{k} \right) q^D - \frac{\mathbb{B}_k}{2k} \quad \text{avec } \delta_D = \begin{cases} 1 & \text{si } D \text{ est un carré} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
 &= \sum_{\substack{D \equiv 0,1 [4] \\ D > 0}} \sum_{\substack{|b| < \sqrt{D} \\ b \equiv D [2]}} \sigma_{k-1}\left(\frac{D-b^2}{4}\right) q^D - \frac{\mathbb{B}_k}{k} \sum_{l>0} q^{l^2} - \frac{\mathbb{B}_k}{2k} \\
 &= \sum_{\substack{D \equiv 0,1 [4] \\ D > 0}} \sum_{\substack{|b| < \sqrt{D} \\ b \equiv D [2]}} \sigma_{k-1}\left(\frac{D-b^2}{4}\right) q^D - \frac{\mathbb{B}_k}{2k} \sum_{l \in \mathbb{Z}} q^{l^2}
 \end{aligned}$$

Calculons la première somme que l'on nomme S :

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{\substack{D \equiv 0,1 [4] \\ D > 0}} \sum_{\substack{|b| < \sqrt{D} \\ b \equiv D [2]}} \sigma_{k-1}\left(\frac{D-b^2}{4}\right) q^D \\
 &= \sum_{l>0} \left(\sum_{\substack{|b| < \sqrt{4l} \\ b \equiv 0 [2]}} \sigma_{k-1}\left(\frac{4l-b^2}{4}\right) q^{4l} + \sum_{\substack{|b| < \sqrt{4l+1} \\ b \equiv 1 [2]}} \sigma_{k-1}\left(\frac{4l+1-b^2}{4}\right) q^{4l+1} \right) \\
 &= \sum_{l>0} \left(\sum_{(2j)^2 < 4l} \sigma_{k-1}\left(\frac{4l-(2j)^2}{4}\right) q^{4l} + \sum_{(2j+1)^2 < 4l+1} \sigma_{k-1}\left(\frac{4l+1-(2j+1)^2}{4}\right) q^{4l+1} \right) \\
 &= \sum_{l>0} \left(\sum_{j^2 < l} \sigma_{k-1}(l-j^2) q^{4(l-j^2)} q^{(2j)^2} + \sum_{j(j+1) < l} \sigma_{k-1}(l-j(j+1)) q^{4(l-j(j+1))} q^{(2j+1)^2} \right) \\
 &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(q^{(2j)^2} \sum_{l=j^2+1}^{\infty} \sigma_{k-1}(l-j^2) q^{4(l-j^2)} + q^{(2j+1)^2} \sum_{l=j(j+1)+1}^{\infty} \sigma_{k-1}(l-j(j+1)) q^{4(l-j(j+1))} \right) \\
 &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(q^{(2j)^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_{k-1}(m) q^{4m} + q^{(2j+1)^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_{k-1}(m) q^{4m} \right) \\
 &= \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} q^{j^2} \right) \left(\sum_{m>0} \sigma_{k-1}(m) q^{4m} \right)
 \end{aligned}$$

Et donc finalement on a :

$$\boxed{\mathcal{F}_k(z) = \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} q^{j^2} \right) \left(\sum_{m>0} \sigma_{k-1}(m) q^{4m} - \frac{\mathbb{B}_k}{2k} \right)} \quad (2.20)$$

On reconnaît des séries de formes modulaires particulières.

Définition 2.3.3. On appelle *fonction theta de Jacobi* la fonction de série de Fourier :

$$\theta(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} q^{j^2} \quad \text{avec } q = e^{2\pi iz}$$

Avec cette définition et le développement en série de Fourier des séries de Eisenstein vu en 2.16 nous pouvons réécrire l'équation 2.20.

$$\boxed{\mathcal{F}_k(z) = \theta(z).G_k(4z)} \quad (2.21)$$

La fonction \mathcal{F}_k se factorise donc comme le produit d'une forme modulaire de poids k et la fonction thêta de Jacobi qui est ce qu'on appelle une forme modulaire de poids $\frac{1}{2}$.

Définition 2.3.4. Soit $k \in \mathbb{N}$ pair. On appelle *forme modulaire de poids $k + \frac{1}{2}$* une fonction g holomorphe de \mathbb{H} dans \mathbb{C} qui admet un développement en série de Fourier de la forme :

$$g(z) = \sum_{\substack{D \geq 0 \\ D \equiv 0,1 [4]}} c(D)q^D \quad \text{avec } q = e^{2\pi iz} \quad (2.22)$$

et telle que la fonction $\frac{g}{\theta}$ agit comme une forme modulaire de poids k et de niveau 4.

$$\forall \begin{bmatrix} a & b \\ 4c & d \end{bmatrix} \in \Gamma_0(4), \quad \frac{g}{\theta} \left(\frac{az + b}{4cz + d} \right) = (4cz + d)^k \frac{g}{\theta}(z) \quad (2.23)$$

On note $\mathcal{M}_{k+\frac{1}{2}}$ l'ensemble des formes modulaires de poids $k + \frac{1}{2}$.

Il découle alors de notre factorisation de \mathcal{F}_k le théorème suivant.

Théorème 8. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ pair, on a :

$$\mathcal{F}_k \in \mathcal{M}_{k+\frac{1}{2}}$$

Démonstration. Nous traitons d'abord le cas $k > 2$.

On a déjà vu que le développement en série de Fourier est bien de la forme de 2.22 car $n_k(D) = 0$ lorsque $D \equiv 2, 3 [4]$.

Il reste à voir que \mathcal{F}_k vérifie bien 2.23. Pour cela, on utilise naturellement la factorisation que nous venons de calculer :

$$\frac{\mathcal{F}_k}{\theta} \left(\frac{az + b}{4cz + d} \right) = G_k \left(4 \frac{az + b}{4cz + d} \right) = G_k \left(\frac{a(4z) + 4b}{c(4z) + d} \right) = (4cz + d)^k G_k(4z) = (4cz + d)^k \frac{\mathcal{F}_k}{\theta}(z)$$

Pour le cas $k = 2$ il faut refaire un calcul de factorisation de \mathcal{F}_2 en prenant en compte le terme correctif supplémentaire dans le cas $D = m^2$. et on trouve

$$\mathcal{F}_2(z) = \theta(z).G_2(4z) + \frac{1}{8\pi i} \theta'(z)$$

où G_2 se définit comme les séries de Eisenstein pour $k = 2$ mais qui n'est pas tout à fait une forme modulaire de poids 2. Le terme correctif $\frac{1}{8\pi i}\theta'(z)$ va compenser ce défaut de modularité et finalement le calcul donnera aussi que $\mathcal{F}_2 \in \mathcal{M}_{2+\frac{1}{2}}$ \square

On a donc vu qu'il y a un lien étroit entre les formes modulaires de poids demi-entier et les fonctions $F_{k,D}$ puisque :

$$\mathcal{F}_k = \sum_{D \in \mathbb{N}} F_{k,D}(0)q^D \in \mathcal{M}_{k+\frac{1}{2}}$$

En réalité le lien est encore un peu plus fort que cela et on a le théorème.

Théorème 9. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ pair et $x \in \mathbb{R}$. On pose :

$$T_x^{(k)}(z) = \sum_{D \in \mathbb{N}} F_{k,D}(x)q^D \tag{2.24}$$

On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad T_x^{(k)} \in \mathcal{M}_{k+\frac{1}{2}}$$

Ce théorème ressemble à un théorème de l'étude des fonctions thêta générales qui peut être trouvé au chapitre 10 de [4].

Théorème 10. Soit Q une forme quadratique définie positive à n variables. Soit P un polynôme homogène de degré d à n variables qui est sphérique par rapport à Q . Soit L un réseau de \mathbb{R}^n . Alors :

$$\theta_L(z) = \sum_{m \in L} P(m)q^{Q(m)} \in \mathcal{M}_{d+\frac{n}{2}}$$

Un calcul que nous ne détaillerons pas montre que :

$$T_x^{(k)}(z) = \sum_{\substack{a,b,c \in \mathbb{Z} \\ a < 0 < ax^2 + bx + c}} (ax^2 + bx + c)^{k-1} q^{b^2 - 4ac} - \frac{1}{2k} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \overline{\mathbb{B}_k}(mx) q^{m^2} + \delta_{2,k} \frac{\kappa(x)}{2} \sum_{m \in \mathbb{N}} m^2 q^{m^2}$$

Si on oublie les deux derniers termes jouent le rôle de termes correctifs on a une expression de la forme :

$$T_x^{(k)}(z) \approx \sum_{\substack{a,b,c \in \mathbb{Z} \\ a < 0 < ax^2 + bx + c}} P_x^{(k)}(a, b, c) q^{Q(a, b, c)}$$

avec

$$Q(a, b, c) = b^2 - 4ac = (2ax + b)^2 - 4a(ax^2 + bx + c)$$

qui est une forme quadratique à 3 variables, positive sur le cône $C = \{(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3 \mid a < 0 < ax^2 + bx + c\}$. Et :

$$P_x^{(k)}(a, b, c) = (ax^2 + bx + c)^{k-1}$$

qui est un polynôme homogène de degré $k - 1$ (en a, b et c), sphérique par rapport à Q .

Cette dernière observation amène à se questionner sur l'existence d'une théorie encore plus générale des fonctions thêta. Est-ce que $\theta_L^C(z) = \sum_{m \in L \cap C} P(m)q^{Q(m)} \in \mathcal{M}_{\deg(P) + \frac{\dim(L)}{2}}$ pour tout C , cône sur lequel Q est définie positive? Et si oui, peut-on trouver d'autres formes que les cônes?

3

SYMBOLES MODULAIRES ET PROGRAMMATION

Nous commençons par rappeler la définition de $E_D(x)$ introduite en 1.1 que nous utiliserons dans toute la partie.

Définition 3.0.1. Soit $D \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on définit :

$$E_D(x) = \left\{ P(X) = aX^2 + bX + c \in \mathbb{Z}[X] \left| \begin{array}{l} a < 0 \\ ax^2 + bx + c > 0 \\ b^2 - 4ac = D \end{array} \right. \right\}$$

Cet ensemble est essentiel dans la définition de $F_{k,D}$ car nous avons vu en 1.5.1 :

$$F_{k,D}(x) = \sum_{P \in E_D(x)} P(x)^{k-1}$$

3.1 L'ENSEMBLE $E_D(x)$

Pour faciliter l'étude des fonctions $F_{k,D}$, il peut être important de disposer d'un moyen de calculer rapidement une approximation de leurs valeurs. Nous avons présenté en 1.1 un algorithme naïf qui propose une approximation de $F_{2,5}(x)$. Toutefois cet algorithme est peu efficace puisqu'il teste un par un tous les polynômes $P = [a, b, c]$ où b est assez proche de $-2ax$.

Tout algorithme permettant de calculer $F_{k,D}(x)$ devrait se décomposer en trois étapes

1. Déterminer l'ensemble $E_D(x)$
2. Calculer $P(x)^{k-1}$ pour tout polynôme $P \in E_D(x)$
3. Sommer tous les $P(x)^{k-1}$ pour obtenir $F_{k,D}(x)$

Notons que la partie difficile de l'algorithme est la première. C'est pourquoi il est important d'étudier l'ensemble $E_D(x)$ si nous voulons améliorer l'efficacité notre programme.

3.1.1 • FINITUDE

Quand on souhaite calculer un ensemble, la première question qu'il convient de se poser est celle de sa cardinalité. L'ensemble $E_D(x)$ est-il fini ou infini ?

La proposition 1.1.3 nous dit que pour $x \in \mathbb{Q}$, l'ensemble $E_D(x)$ est fini. Cependant il existe des $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels $E_D(x)$ est infini. C'est le cas par exemple de $E_D(\pi)$.

Proposition 3.1.1. *Si x n'est ni un rationnel ni un entier quadratique alors $E_D(x)$ est infini.*

Démonstration. Soit un tel x . Supposons par l'absurde que $E_D(x)$ soit fini d'éléments Q_1, Q_2, \dots, Q_n . Alors :

$$A_D(x) = Q_1(x) + Q_2(x) + \dots + Q_n(x) = \alpha_D$$

Par définition de $E_D(x)$, tous les polynômes Q_k sont des polynômes de degré 2 à coefficients entiers et de coefficient directeur strictement négatif. De plus on a vu en 1.2.5 que $\alpha_D \in \mathbb{N}$. Donc le polynôme $Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n - \alpha_D$ est encore un polynôme de degré 2 à coefficients entiers et de coefficient directeur strictement négatif. L'équation précédente montre que $Q(x) = 0$ donc x doit être rationnel ou quadratique, d'où la contradiction. \square

Pour récapituler on a :

$x \in \mathbb{Q}$	$x \notin \mathbb{Q}$ quadratique	$x \notin \mathbb{Q}$ non-quadratique
$ E_D(x) < +\infty$?	$ E_D(x) = +\infty$

TABLE 8 – Cardinalité de $E_D(x)$

3.1.2 • ACTION DE $SL_2(\mathbb{Z})$

Pour continuer à étudier $E_D(x)$ et finir de remplir la table 8, nous devons introduire des outils algébriques plus complexes. On commence par définir une action à droite de $SL_2(\mathbb{Z})$ sur l'ensemble des trinômes à coefficients entiers.

Définition 3.1.2. Soit P un polynôme à coefficients entiers.

$$\forall M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \quad (P | M) = (cX + d)^2 \cdot P\left(\frac{aX + b}{cX + d}\right)$$

Exemple 3.1.3. Pour comprendre une action, il est toujours utile de regarder comment agissent les générateurs du groupe. Ici on a :

$$SL_2(\mathbb{Z}) = \left\langle T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Alors pour $Q = aX^2 + bX + c = [a, b, c]$ on a :

$$(Q | T^k) = [a, b + 2ka, ak^2 + bk + c] = Q(X + k) \quad (3.1)$$

$$(Q | S) = [c, -b, a] = X^2 \cdot Q\left(-\frac{1}{X}\right) \tag{3.2}$$

Remarque 3.1.4. Un intérêt notable de cette action est qu'elle conserve le discriminant D . On peut donc espérer travailler avec cette action dans les ensembles $E_D(x)$. Toutefois on voit avec l'action de S que la propriété " $a < 0$ " n'est pas toujours conservée.

Au paragraphe 10 de l'article de Zagier [11], l'auteur évoque brièvement le fait qu'il serait possible d'utiliser cette action pour générer rapidement les polynômes de $E_D(x)$:

"Each quadratic function Q which appeared [in $E_5(\frac{1}{\pi})$] was obtained from preceding one by applying a fairly simple element of $SL_2(\mathbb{Z})$, and using this observation it was possible to write a computer program which generated all of the Q 's very quickly. For instance, the 30th function Q [in $E_5(\frac{1}{\pi})$] turns out to be the polynomial :

$$Q(x) = -535055621994441675779x^2 + 340626988278096109055x - 54212468934964085845$$

”

Cela amène à regarder s'il n'existe pas de relations algébriques entre les polynômes de $E_D(x)$.

3.1.3 • LIEN AVEC LES FRACTIONS CONTINUES

L'algorithme naïf décrit en section 1.1 nous donne accès aux premiers polynômes de $E_D(x)$ et cela nous permet de chercher s'il n'existe pas de relations simples entre eux faisant intervenir l'action de $SL_2(\mathbb{Z})$.

Si nous ne trouvons pas de relation évidente entre les polynômes de $E_5(\frac{1}{\pi})$, nous découvrons des phénomènes intéressants pour des valeurs quadratiques de x .

Exemple 3.1.5. Soit $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or. On a que $E_D(\phi)$ est stable par l'action de $STST^{-1}$ quel que soit D .

Par ailleurs, il semble même que $E_5(\phi)$ soit engendré par les polynômes $Q_1 = [-1, 3, -1]$ et $Q_2 = [-1, 5, -5]$ auxquels on applique simplement les puissances de $STST^{-1}$. Et nous pouvons trouver de tels générateurs pour tout discriminant D .

Un phénomène similaire se produit pour $E_D(\sqrt{2})$. L'ensemble $E_D(\sqrt{2})$ est stable par l'action de $T^{-1}ST^2ST^{-1}$ et il semble que $E_5(\sqrt{2})$ soit engendré par 4 polynômes auxquels on applique les puissances successives de cette matrice.

Une particularité de ces deux entiers quadratiques est la simplicité de leur développement en fraction continue. En effet le développement en fraction continues de ϕ est la suite constante égale à 1. Nous noterons $\phi = [1, 1, 1, \dots]$. Le développement en fraction continue de $\sqrt{2}$ est quant à lui $\sqrt{2} = [1, 2, 2, \dots]$.

Observons les ensembles $E_D(x)$ pour d'autres valeurs de x ayant des développements en fraction continue relativement simples.

Exemple 3.1.6.

<table style="border-collapse: collapse; margin: auto;"> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">[-1, -1, 1]</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">[-1, 1, 1]</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">$E_5(0) \mid T^0$</td></tr> </table>	[-1, -1, 1]	[-1, 1, 1]	$E_5(0) \mid T^0$	<table style="border-collapse: collapse; margin: auto;"> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">[-1, 1, 1]</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">[-1, 3, -1]</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">$E_5(0) \mid T^{-1}$</td></tr> </table>	[-1, 1, 1]	[-1, 3, -1]	$E_5(0) \mid T^{-1}$									
[-1, -1, 1]																
[-1, 1, 1]																
$E_5(0) \mid T^0$																
[-1, 1, 1]																
[-1, 3, -1]																
$E_5(0) \mid T^{-1}$																
(a) $x = 0 = [0]$	(b) $x = 1 = [1]$															
<table style="border-collapse: collapse; margin: auto;"> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">[-1, 1, 1]</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">[-5, 5, -1]</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">[-1, -1, 1]</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">[-11, 7, -1]</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">$E_5(0) \mid T^0$</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">$E_5(0) \mid T^3 ST^0$</td></tr> </table>	[-1, 1, 1]	[-5, 5, -1]	[-1, -1, 1]	[-11, 7, -1]	$E_5(0) \mid T^0$	$E_5(0) \mid T^3 ST^0$	<table style="border-collapse: collapse; margin: auto;"> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">[-1, 1, 1]</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">[-41, 13, -1]</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">[-6581, 1857, -131]</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">[-1, -1, 1]</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">[-55, 13, -1]</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">[-5489, 1547, -109]</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">$E_5(0) \mid T^0$</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">$E_5(0) \mid T^7 ST^0$</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">$E_5(0) \mid T^{-11} ST^7 ST^0$</td></tr> </table>	[-1, 1, 1]	[-41, 13, -1]	[-6581, 1857, -131]	[-1, -1, 1]	[-55, 13, -1]	[-5489, 1547, -109]	$E_5(0) \mid T^0$	$E_5(0) \mid T^7 ST^0$	$E_5(0) \mid T^{-11} ST^7 ST^0$
[-1, 1, 1]	[-5, 5, -1]															
[-1, -1, 1]	[-11, 7, -1]															
$E_5(0) \mid T^0$	$E_5(0) \mid T^3 ST^0$															
[-1, 1, 1]	[-41, 13, -1]	[-6581, 1857, -131]														
[-1, -1, 1]	[-55, 13, -1]	[-5489, 1547, -109]														
$E_5(0) \mid T^0$	$E_5(0) \mid T^7 ST^0$	$E_5(0) \mid T^{-11} ST^7 ST^0$														
(c) $x = \frac{1}{3} = [0, 3]$	(d) $x = \frac{11}{78} = [0, 7, 11]$															
<table style="border-collapse: collapse; margin: auto;"> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">[-1, 1, 1]</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">[-5, 15, -11]</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">[-31, 87, -61]</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">[-1061, 3041, -2179]</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">[-1, 3, -1]</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">[-1, 5, -5]</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">[-59, 169, -121]</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">[-641, 1839, -1319]</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">$E_5(0) \mid T^{-1}$</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">$E_5(0) \mid T^2 ST^{-1}$</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">$E_5(0) \mid T^{-3} ST^2 ST^{-1}$</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">$E_5(0) \mid T^4 ST^{-3} ST^2 ST^{-1}$</td></tr> </table>	[-1, 1, 1]	[-5, 15, -11]	[-31, 87, -61]	[-1061, 3041, -2179]	[-1, 3, -1]	[-1, 5, -5]	[-59, 169, -121]	[-641, 1839, -1319]	$E_5(0) \mid T^{-1}$	$E_5(0) \mid T^2 ST^{-1}$	$E_5(0) \mid T^{-3} ST^2 ST^{-1}$	$E_5(0) \mid T^4 ST^{-3} ST^2 ST^{-1}$				
[-1, 1, 1]	[-5, 15, -11]	[-31, 87, -61]	[-1061, 3041, -2179]													
[-1, 3, -1]	[-1, 5, -5]	[-59, 169, -121]	[-641, 1839, -1319]													
$E_5(0) \mid T^{-1}$	$E_5(0) \mid T^2 ST^{-1}$	$E_5(0) \mid T^{-3} ST^2 ST^{-1}$	$E_5(0) \mid T^4 ST^{-3} ST^2 ST^{-1}$													
(e) $x = \frac{43}{30} = [1, 2, 3, 4]$																

TABLE 9 – Polynômes de $E_5(x)$ pour quelques valeurs de x

Remarque 3.1.7. Nous utilisons la notation $E_D(x) \mid M$ pour désigner l'ensemble des polynômes de $E_D(x)$ auxquels on applique la matrice M .

On observe une certaine tendance. Il semble que les $E_5(x)$ soient tous engendrés par les polynômes de $E_5(0)$ sous l'actions de certaines matrices qui dépendent directement du développement en fraction continue de x . Le phénomène persiste en discriminant D quelconque. Il semble possible de générer les $E_D(x)$ simplement à partir des polynômes de $E_D(0)$. Ces observations amènent à la conjecture suivante.

Conjecture 1. Soit $x \in \mathbb{R}$ qui a pour développement en fraction continue $[n_0, n_1, \dots]$. On peut calculer $E_D(x)$ avec la formule :

$$E_D(x) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(E_D(0) \mid T^{(-1)^{i+1} \cdot n_i} S \dots ST^{n_1} ST^{-n_0} \right)$$

3.2 ALGORITHME DE CALCUL DE $E_D(x)$

Malheureusement la conjecture 1 n'est pas exacte. Elle est par exemple mise en défaut pour $x = \frac{2}{3} = [0, 1, 2]$.

Exemple 3.2.1.

$[-1, 1, 1]$
$[-1, 3, -1]$
$[-5, 5, -1]$
$[-11, 15, -5]$

(a) Polynômes de $E_5(\frac{2}{3})$

$[-1, -1, 1]$	$[-1, 3, -1]$	$[-5, 5, -1]$
$[-1, 1, 1]$	$[1, 1, -1]$	$[-11, 15, -5]$
$E_5(0) T^0$	$E_5(0) TST^0$	$E_5(0) T^{-2}STST^0$

(b) Prévisions de la conjecture pour $x = [0, 1, 2]$

TABLE 10 – Différences entre $E_5(\frac{2}{3})$ et les prévisions de la conjecture 1

Remarque 3.2.2. Lorsque l'on regarde de plus près les prévisions de la conjecture, on remarque que dans tous les cas elle ne pouvait pas être correcte car dans $E_5(0) | TST^0$ on a le polynôme $Q = [1, 1, -1]$ qui a un coefficient dominant positif. Pour rendre la conjecture valide pour le cas $x = \frac{2}{3}$ on aurait envie de dire que le polynôme $-Q = [-1, -1, 1]$ qui apparaît dans $E_5(0) | T^0$ "annule" le polynôme Q et que aucun des deux ne doit être compté.

Pour rendre la conjecture 1 valide nous devons introduire des objets un peu plus développés.

3.2.1 • SYMBOLES MODULAIRES

Nous définissons une généralisation de notre ensemble $E_D(x)$.

Définition 3.2.3. Soit $D \in \mathbb{N}$ et $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$. On pose :

$$E_D(x, y) = (+) \left\{ P = [a, b, c] \left| \begin{array}{l} a < 0 \\ P(x) > 0 > P(y) \\ b^2 - 4ac = D \end{array} \right. \right\} \cup (-) \left\{ P = [a, b, c] \left| \begin{array}{l} a < 0 \\ P(y) > 0 > P(x) \\ b^2 - 4ac = D \end{array} \right. \right\}$$

où $(+)$ et $(-)$ sont des signes formels qu'on associe à chaque polynôme $P \in E_D(x, y)$.

Nous pouvons voir $E_D(x, y)$ comme l'ensemble des polynômes qui "séparent" x et y dans le sens où $P(x)$ et $P(y)$ n'ont pas le même signe. On choisit de compter P positivement lorsque x se situe entre les racines de P .

Remarque 3.2.4. On a un lien entre les ensembles $E_D(x)$ et cette généralisation :

$$E_D(x) = E_D(x, +\infty) \quad (3.3)$$

Nous citons quelques propriétés élémentaires sur ces objets.

Proposition 3.2.5. On dispose d'une propriété d'antisymétrie

$$\forall x, y \in \overline{\mathbb{R}} \quad E_D(x, y) = -E_D(y, x) \quad (3.4)$$

Et de la relation de Chasles

$$\forall x, y, z \in \overline{\mathbb{R}} \quad E_D(x, z) = E_D(x, y) + E_D(y, z) \quad (3.5)$$

où le + de 3.5 est à comprendre comme une union où $(+)Q + (-)Q = \emptyset$

Démonstration. La preuve de l'antisymétrie est triviale avec la définition de $E_D(x, y)$. Pour la preuve de la relation de Chasles on fait une simple disjonction de cas.

Signe de $P(x)$	+	+	+	-	+	-	-	-
Signe de $P(y)$	+	+	-	+	-	+	-	-
Signe de $P(z)$	+	-	+	+	-	-	+	-
Signe dans $E_D(x, y)$	0	0	(+)	(-)	(+)	(-)	0	0
Signe dans $E_D(y, z)$	0	(+)	(-)	0	0	(+)	(-)	0
Signe dans $E_D(x, z)$	0	(+)	0	(-)	(+)	0	(-)	0

On a bien que la somme des lignes "Signe dans $E_D(x, y)$ " et "Signe dans $E_D(y, z)$ " nous donne la ligne "Signe dans $E_D(x, z)$ " d'où la relation 3.5. \square

On définit une action à droite de $SL_2(\mathbb{Z})$ sur les $E_D(x, y)$.

Définition 3.2.6. On rappelle l'action à gauche usuelle de $SL_2(\mathbb{Z})$ sur $\overline{\mathbb{R}}$:

$$\forall x \in \overline{\mathbb{R}}, \forall M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \quad M.x = \frac{ax + b}{cx + d} \quad (3.6)$$

On définit ensuite l'action à droite suivante :

$$\forall x, y \in \overline{\mathbb{R}}, \forall M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \quad E_D(x, y) | M = E_D(M^{-1}.x, M^{-1}.y) \quad (3.7)$$

Remarque 3.2.7. Dans le paragraphe précédent nous avons utilisé la notation $E_D(x) | M$ pour désigner l'ensemble des polynômes de la forme $P | M$ avec $P \in E_D(x)$.

Toutefois avec notre définition de $E_D(x, y) | M$ il n'y a a priori pas de lien avec l'ensemble des polynômes de la forme $P | M$ avec $P \in E_D(x, y)$. Le théorème 12 s'intéressera au lien

entre ces deux expressions.

Définition 3.2.8. On appelle symboles modulaires les objets $\{\alpha, \beta\}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ et qui vérifient les propriétés :

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\} \quad \{\alpha, \beta\} + \{\beta, \gamma\} = \{\alpha, \gamma\}$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\} \quad \{\alpha, \alpha\} = 0$$

Et on dispose d'une action de $SL_2(\mathbb{Z})$:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}, \forall M \in SL_2(\mathbb{Z}) \quad \{\alpha, \beta\} | M = \{\alpha | M, \beta | M\}$$

où $(\alpha | M) = M^{-1} \cdot \alpha$ désigne l'action à droite de $SL_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$.

Avec les propriétés que l'on a démontrées plus haut on a directement le résultat.

Proposition 3.2.9. Soit $D \in \mathbb{N}$ fixé. Pour tout $x, y \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ les $E_D(x, y)$ sont des symboles modulaires.

On dispose d'un théorème très utile sur les symboles modulaires qui va être la clé de voûte de notre résultat final.

Théorème 11. Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, il existe $M_0, \dots, M_n \in SL_2(\mathbb{Z})$ tels que

$$\{\alpha, \beta\} = \sum_{i=0}^n \{0, \infty\} | M_i \tag{3.8}$$

Démonstration. Nous réarrangeons la preuve donnée dans [10]. On commence par le cas simple où $\{\alpha, \beta\} = \{\frac{b}{a}, \infty\}$.

Le développement en fraction continues de α donne :

$$\frac{b}{a} = \frac{b_n}{a_n}, \dots, \frac{b_0}{a_0} = \frac{b_0}{1}, \frac{b_{-1}}{a_{-1}} = \frac{1}{0} = \infty$$

avec $\forall k \in [0, n], b_{k-1}a_k - b_k a_{k-1} = (-1)^k$. On a alors :

$$g_k = \begin{bmatrix} (-1)^k a_k & -(-1)^k b_k \\ -a_{k-1} & b_{k-1} \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \quad \text{et} \quad \{0, \infty\} | g_k = \left\{ \frac{b_k}{a_k}, \frac{b_{k-1}}{a_{k-1}} \right\}$$

On utilise alors la relation de Chasles pour conclure.

$$\left\{ \frac{b}{a}, \infty \right\} = \sum_{k=0}^n \left\{ \frac{b_k}{a_k}, \frac{b_{k-1}}{a_{k-1}} \right\} = \sum_{k=0}^n \{0, \infty\} | g_k$$

On s'occupe à présent du cas général où $\beta \neq \infty$. On se ramène au premier cas en utilisant les propriétés de Chasles et d'antisymétrie :

$$\{\alpha, \beta\} = \{\alpha, \infty\} - \{\beta, \infty\}$$

On conclut alors en faisant la décomposition du premier cas pour les symboles $\{\alpha, \infty\}$ et $\{\beta, \infty\}$. \square

Remarque 3.2.10. Cette démonstration constructive nous donne directement un algorithme efficace pour calculer les matrices M_i simplement à partir des développements en fractions continues de α et β . Cela permet de calculer des symboles modulaires efficacement avec un ordinateur.

Remarque 3.2.11. On peut utiliser cette décomposition comme une définition pour étendre ces symboles modulaires à des symboles de la forme $\{\alpha, \beta\}$ avec $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\forall \alpha \in \overline{\mathbb{R}} \quad \{\alpha, \infty\} = \sum_{k=0}^{\infty} \{0, \infty\} | g_k \quad (3.9)$$

Avec g_k les matrices qui apparaissent dans la démonstration du théorème 11 et qui peuvent être calculées juste avec le développement en fraction continue de α .

Pour le cas général on pose :

$$\forall \alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}} \quad \{\alpha, \beta\} = \{\alpha, \infty\} - \{\beta, \infty\} \quad (3.10)$$

3.2.2 • THÉORÈME DE STRUCTURE

Avant d'arriver au théorème qui donnera à la conjecture 1 une écriture correcte, nous devons lever un abus de notation.

Quand nous travaillons avec les symboles modulaires $E_D(x, y)$, nous utilisons l'écriture $E_D(x, y) | M$ pour se référer à l'ensemble $E_D(M^{-1}.x, M^{-1}.y)$ c'est à dire l'ensemble des polynômes qui séparent $M^{-1}.x$ et $M^{-1}.y$. Alors que quand nous travaillons avec les ensembles $E_D(x)$, nous utilisons l'écriture $E_D(x) | M$ pour désigner l'ensemble des polynômes $P | M$ avec $P \in E_D(x)$. Le théorème suivant montre que, de façon surprenante, cet abus de notation est justifié.

Théorème 12. Soit $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ et $G \in SL_2(\mathbb{Z})$.

$$E_D(x, y) | G = \{(P | G) | P \in E_D(x, y)\}$$

En identifiant $(+)(P | G)$ avec $(-)(-(P | G))$ lorsque $P | G$ a un coefficient directeur positif.

Ce théorème est crucial car il fait le lien entre une action sur les coordonnées de $E_D(x, y)$ et une action sur les polynômes contenus dans cet ensemble.

Démonstration. Il suffit de montrer l'égalité pour les deux générateurs de $SL_2(\mathbb{Z})$.

Cas $M = T$:

Notons tout d'abord que :

$$\begin{aligned} E_D(x, y) | T &= E_D(x - 1, y - 1) \\ P | T &= P(X + 1) \end{aligned}$$

Pour P de coefficient directeur négatif, $P | T$ est aussi de coefficient directeur négatif (d'après 3.1). On a alors l'équivalence :

$$\begin{aligned} (+)P \in E_D(x, y) &\iff P(x) > 0 \text{ et } P(y) < 0 \\ &\iff (P | T)(x - 1) > 0 \text{ et } (P | T)(y - 1) < 0 \\ &\iff (+)(P | T) \in E_D(x, y) | T \end{aligned}$$

et de même :

$$(-)P \in E_D(x, y) \iff (-)(P | T) \in E_D(x, y) | T$$

Cas $M = S$:

On a que :

$$\begin{aligned} E_D(x, y) | S &= E_D\left(-\frac{1}{x}, -\frac{1}{y}\right) \\ P | T &= X^2 P\left(-\frac{1}{X}\right) \end{aligned}$$

Pour $P = [a, b, c]$ avec $a < 0$, on a $P | S = [c, -b, a]$.

Si $c < 0$, le coefficient directeur de $P | S$ est négatif et on montre aisément comme pour le cas $M = T$ que :

$$(\pm)P \in E_D(x, y) \iff (\pm)(P | S) \in E_D(x, y) | S$$

Si $c > 0$, c'est le coefficient directeur de $-(P | S)$ qui est négatif. On a :

$$\begin{aligned} (+)P \in E_D(x, y) &\iff P(x) > 0 \text{ et } P(y) < 0 \\ &\iff (P | S)\left(-\frac{1}{x}\right) > 0 \text{ et } (P | S)\left(-\frac{1}{y}\right) < 0 \\ &\iff -(P | S)\left(-\frac{1}{x}\right) < 0 \text{ et } -(P | S)\left(-\frac{1}{y}\right) > 0 \\ &\iff (-)(-(P | S)) \in E_D(x, y) | S \end{aligned}$$

et de même :

$$(-)P \in E_D(x, y) \iff (+)(-(P | S)) \in E_D(x, y) | S$$

en utilisant l'identification $(+)(P | S) = (-)(-(P | S))$ on retrouve bien :

$$(\pm)P \in E_D(x, y) \iff (\pm)(P | S) \in E_D(x, y) | S$$

Comme le théorème est vrai pour les générateurs de $SL_2(\mathbb{Z})$, il est vrai pour tout $M \in SL_2(\mathbb{Z})$ □

Nous avons à présent en main tous les ingrédients pour comprendre la structure des ensembles $E_D(x)$.

Théorème 13. *Soit $x \in \mathbb{R}$ qui a pour développement en fraction continue $[n_0, n_1, \dots]$. On peut calculer $E_D(x)$ avec la formule :*

$$E_D(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(E_D(0) \mid T^{(-1)^{i+1} \cdot n_i} S \dots ST^{n_1} ST^{-n_0} \right)$$

où la somme est à comprendre comme la somme formelle sur les éléments de $E_D(x, \infty)$ en prenant en compte leur signe (+) ou (-).

Démonstration. Pour la démonstration de ce théorème, il suffit simplement d'appliquer le théorème 11 à $E_D(x, \infty)$.

$$E_D(x, \infty) = \sum_{k=0}^{\infty} (E_D(0, \infty) \mid g_k)$$

Avec g_k la matrice qui apparaît dans la démonstration du théorème 11. Il est facile de montrer que :

$$\begin{cases} g_0 = T^{-n_0} \\ g_{k+1} = T^{(-1)^k n_{k+1}} \cdot S \cdot g_k \end{cases}$$

On a donc

$$E_D(x, \infty) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(E_D(0, \infty) \mid T^{(-1)^{i+1} \cdot n_i} S \dots ST^{n_1} ST^{-n_0} \right)$$

Il suffit ensuite d'utiliser 3.3 pour remplacer les $E_D(x, \infty)$ par des $E_D(x)$. □

Ce théorème nous permet de calculer les ensembles $E_D(x)$ beaucoup plus efficacement qu'avec l'algorithme naïf utilisé dans la partie 1.1.

```
def generateEDxQuick(x, D, maxContinuedFractionLength):
    if (D in EO_DICO):
        EDO = EO_DICO[D]
    else:
        EDO = generateEDxNaive(0, D)
        EO_DICO[D] = EDO

    continuedFraction = calculateContinuedFraction(maxContinuedFractionLength)
    gkList = generateGkList(continuedFraction)
    EList = [actionE(gk, EDO) for gk in gkList]

    EDx = sumE(EList)
    return EDx
```

Cet algorithme permet de calculer en temps quasiment constant les polynômes de l'ensemble $E_D(x)$ en ayant seulement la connaissance de $E_D(0)$. Il permet en outre de retrouver le polynôme :

$$Q(x) = -535055621994441675779x^2 + 340626988278096109055x - 54212468934964085845$$

que Zagier donne dans son article [11] comme étant le 30ième polynôme de $E_5(\frac{1}{\pi})$. Avec cet algorithme, nous pouvons aller aisément aussi loin qu'on le souhaite, la seule limitation étant la connaissance du développement en fraction continue.

Exemple 3.2.12. Le 100ième polynôme de $E_5(\frac{1}{\pi})$ est :

$$Q(x) = -51872265740788150646546987164308438203636407405987076749432936523242655x^2 + 33022910008091240674276368216353931720252737796486007964670270061858795x - 5255759363066542351572913546582136241749665897521546054245204588249971$$

3.3 COMPLÉMENTS

3.3.1 • CARDINALITÉ

Le théorème 13 nous donne une meilleure compréhension des ensembles $E_D(x)$. Tous les $E_D(x)$ se calculent à partir de $E_D(0)$ et du développement en fraction continue de x . La formule de 13 suggère que plus le développement en fraction continue de x est long et plus l'ensemble $E_D(x)$ sera grand. C'est une observation qui se confirme empiriquement dans les exemples donnés en 3.1.6.

Théorème 14. Soit $D \equiv 0, 1 [4]$ qui n'est pas un carré et $x = [n_0, n_1, \dots, n_m] \in \mathbb{Q}$ un rationnel avec un développement en fraction continue de longueur $m + 1$. On a

$$|E_D([n_0, \dots, n_m])| = \Theta(m)$$

Autrement dit, il existe des constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que

$$c_1(m + 1) \leq |E_D([n_0, \dots, n_m])| \leq c_2(m + 1)$$

(c_1 et c_2 peuvent dépendre de D).

Démonstration. Pour la majoration, il suffit d'appliquer le théorème 13. On a :

$$E_D(x) = \sum_{i=0}^m \left(E_D(0) \mid T^{(-1)^{i+1} \cdot n_i} S \dots S T^{n_1} S T^{-n_0} \right)$$

Donc il vient immédiatement que :

$$|E_D(x)| \leq \sum_{i=0}^m |(E_D(0) | T^{(-1)^{i+1}.n_i} S \dots ST^{n_1} ST^{-n_0})| = (m+1) |E_D(0)|$$

On prend $c_2 = |E_D(0)|$.

La minoration est plus technique.

On montre brièvement comment traiter le cas $D = 4l$.

Comme D n'est pas un carré, on peut l'écrire $D = 4(m_1^2 + m_2)$ avec $0 < m_2 < 2m_1 + 1$ (m_1 est le plus grand carré inférieur à l). Alors

$$\begin{aligned} P_D^+ &= -X^2 + 2m_1X + m_2 \in E_D(0) && \text{et de plus } P_D^+([0, 1]) > 0 \\ P_D^- &= -X^2 - 2m_1X + m_2 \in E_D(0) && \text{et de plus } P_D^-([-1, 0]) > 0 \end{aligned}$$

Lemme 3.3.1.

$$\forall k \in [0, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor] \quad (P_D^+ | T^{(-1)^{2k+1}.n_{2k}} S \dots ST^{-n_0}) \in E_D(x)$$

$$\forall k \in [0, \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor] \quad (P_D^- | T^{(-1)^{2k}.n_{2k+1}} S \dots ST^{-n_0}) \in E_D(x)$$

Et les $(P_D^\pm | T^{(-1)^{k+1}.n_k} S \dots ST^{-n_0})$ sont distincts deux à deux.

Démonstration. Un calcul simple montre que pour $x = [n_0, \dots, n_m]$.

$$(P_D^\pm | T^{(-1)^{k+1}.n_k} S \dots ST^{-n_0})(x) = P_k(x)^2 \cdot P_D^\pm((-1)^k [0, n_{k+1}, \dots, n_m])$$

où P_k est un polynôme qui ne dépend que de k . Ainsi

$$(P_D^+ | T^{(-1)^{2k+1}.n_{2k}} S \dots ST^{-n_0})(x) > 0$$

$$(P_D^- | T^{(-1)^{2k}.n_{2k+1}} S \dots ST^{-n_0})(x) > 0$$

Enfin on montre que la suite $(\alpha_k = -a_k^2 - 2m_1a_k a_{k-1} + m_2 a_{k-1})_{k \geq 0}$ des coefficients directeurs de $P_D^\pm | T^{(-1)^{k+1}.n_k} S \dots ST^{-n_0}$ est strictement décroissante. (les a_k désignant le dénominateur de la k -ième réduite de la fraction continue de x) Il s'agit d'un simple calcul où on utilise le fait que la suite $(a_k)_{k \geq 0}$ est croissante et que $m_2 \leq 2m_1$.

Cela montre à la fois que tous les $P_D^\pm | T^{(-1)^{k+1}.n_k} S \dots ST^{-n_0}$ sont dans $E_D(x)$ et qu'ils sont deux à deux distincts. \square

D'après le lemme, on a montré que $E_D(x)$ contenait au moins $m+1$ polynômes. Donc on prend $c_1 = 1$

Pour le cas $D = 4l + 1$ on écrit $D = (2m_1 + 1)^2 + 4m_2$ (avec $0 < m_2 < 2(m_1 + 1)$) et on procède de manière identique en considérant les polynômes :

$$P_D^+ = -X^2 + (2m_1 + 1)X + m_2 \in E_D(0)$$

$$P_D^- = -X^2 - (2m_1 + 1)X + m_2 \in E_D(0)$$

□

Remarque 3.3.2. Dans la preuve du théorème on a explicité directement des constantes c_1 et c_2 qui sont plutôt bonnes. On a donc l'encadrement :

$$m + 1 \leq |E_D([n_0, \dots, n_m])| \leq (m + 1) |E_D(0)| \tag{3.11}$$

Nous sommes à présent en mesure de compléter la table 8 de cardinalité de $E_D(x)$.

Corollaire 3.3.3. *L'ensemble $E_D(x)$ est fini si et seulement si $x \in \mathbb{Q}$.*

3.3.2 • CONTINUITÉ DE $F_{k,D}$

Nous montrons à présent un résultat que nous avons jusqu'alors admis dans toutes nos démonstrations des deux chapitres précédents.

Théorème 15. *Soit $k > 0$ un entier pair et $D \in \mathbb{N}$ qui n'est pas un carré. La fonction :*

$$F_{k,D}(x) = \sum_{P \in E_D(x)} P(x)^{k-1} = \sum_{\substack{a,b,c \in \mathbb{Z} \\ b^2 - 4ac = D \\ a < 0}} \max(0, (ax^2 + bx + c)^{k-1})$$

est continue sur \mathbb{R} .

Démonstration. On montre que la série converge uniformément. Soit $P = [\alpha, \beta, \gamma] \in E_D(0)$ et $x \in \mathbb{R}$. Soit $(\frac{b_k}{a_k})_{k \geq -1}$ la suite des réduites de la fraction continue de x . On montre par le calcul que :

$$(P | T^{(-1)^{k+1} \cdot n_k} S \dots ST^{-n_0})(x) = \alpha a_k^2 (x - \frac{b_k}{a_k})^2 - \beta (-1)^k a_k a_{k-1} (x - \frac{b_k}{a_k})(x - \frac{b_{k-1}}{a_{k-1}}) + \gamma a_{k-1}^2 (x - \frac{b_{k-1}}{a_{k-1}})^2$$

On utilise ensuite l'approximation diophantienne $|x - \frac{b_k}{a_k}| < \frac{1}{a_k^2}$ et la croissance de la suite des dénominateurs $(a_k)_{k \geq -1}$.

$$|(P | T^{(-1)^{k+1} \cdot n_k} S \dots ST^{-n_0})(x)| < \frac{|\alpha|}{a_k^2} + \frac{|\beta|}{a_k a_{k-1}} + \frac{|\gamma|}{a_{k-1}^2} < \frac{|\alpha| + |\beta| + |\gamma|}{a_{k-1}^2}$$

D'après le théorème 13 :

$$|F_{k,D}(x)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{P \in E_D(0)} \left| (P | T^{(-1)^{i+1} \cdot n_i} S \dots ST^{-n_0}) (x) \right|^{k-1}$$

Donc d'après ce qui précède, on peut majorer le reste d'ordre N par

$$|R_N(x)| \leq \sum_{n > N} \sum_{P = [\alpha, \beta, \gamma] \in E_D(0)} \left(\frac{|\alpha| + |\beta| + |\gamma|}{a_{k-1}^2} \right)^{k-1}$$

(ou 0 dans le cas où $x \in \mathbb{Q}$ et N est plus grand que la longueur de la fraction continue de x)
Or quel que soit $x \in \mathbb{R}$, la suite des dénominateurs $(a_k)_{k \geq -1}$ croît plus vite que la suite de Fibonacci (car $a_k = n_k a_{k-1} + a_{k-1}$ avec $n_k \in \mathbb{N}^*$). Donc :

$$|R_N(x)| \leq \sum_{P = [\alpha, \beta, \gamma] \in E_D(0)} \left(\frac{|\alpha| + |\beta| + |\gamma|}{\phi^N} \right)^{k-1} \leq K_{k,D} \left(\frac{1}{\phi^{k-1}} \right)^N$$

avec ϕ le nombre d'or et $K_{k,D}$ une constante qui ne dépend que de k et D (et donc indépendante de x). Ainsi la $F_{k,D}$ converge uniformément sur \mathbb{R} et est donc continue. \square

4

ESPACES QUADRATIQUES

4.1 LIENS AVEC LA SIGNATURE (2, 1)

Dans cette partie nous montrons en quoi les différents objets que l'on a rencontrés au cours de l'étude des fonctions $F_{k,D}$ sont en réalité tous liés à un espace quadratique de signature (2, 1).

4.1.1 • DÉFINITION

Définition 4.1.1. Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n . Une forme quadratique sur E est une application $q : E \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

- i $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$
- ii $\phi : (x, y) \mapsto \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$ est bilinéaire symétrique.

Définition 4.1.2. On dit qu'une forme quadratique est définie si on a

$$q(x) = 0 \iff x = 0$$

Définition 4.1.3. On dit qu'une famille (e_1, \dots, e_k) est orthogonale pour q si on a

$$\forall i \neq j \in [1, k] \quad \phi(e_i, e_j) = 0$$

Nous donnons à présent un théorème fondamental de la théorie des formes quadratiques. Nous n'en donnons pas la démonstration, elle peut être trouvée dans de nombreux cours sur les formes quadratiques comme par exemple dans [6].

Théorème 16 (Loi d'inertie de Sylvester). *Soit q une forme quadratique non nulle et définie sur un espace vectoriel E de dimension n . Il existe un couple d'entier (s, t) et une base (e_1, \dots, e_n) de E orthogonale pour q telle que :*

$$q\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^s x_i^2 - \sum_{i=1}^t x_{s+i}^2$$

Le couple (s, t) s'appelle la signature de la forme quadratique q .

Remarque 4.1.4. Si q est une forme quadratique de signature (s, t) sur un espace E de dimension n . Alors on a $s + t = n$.

Nous arrivons maintenant à la définition d'un espace quadratique.

Définition 4.1.5. Un espace quadratique de signature (s, t) est un espace vectoriel réel muni d'une forme quadratique de signature (s, t) .

Nous cherchons à travailler avec un espace quadratique de signature $(2, 1)$.

Exemple 4.1.6. On pose :

$$V = \{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid \text{Tr}(M) = 0\} = \left\{ \begin{bmatrix} b & 2c \\ -2a & -b \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

On pose $q = -\det$. Ainsi pour $M \in V$ on a $q(M) = b^2 - 4ac$.
L'espace (V, q) est un espace quadratique de signature $(2, 1)$.

Démonstration. V est clairement un espace vectoriel réel de dimension 3. Pour $M = \begin{bmatrix} b & 2c \\ -2a & -b \end{bmatrix} \in V$, on a

$$q(M) = b^2 - 4ac = b^2 + (a - c)^2 - (a + c)^2$$

donc $q = -\det$ est une forme quadratique de signature $(2, 1)$. □

Dans le reste de la section 4.1 nous travaillerons avec cet espace quadratique (V, q) .

4.1.2 • GROUPE DE SPIN

Pour mieux comprendre la géométrie de l'espace, il est utile de chercher ses isométries et plus particulièrement son groupe de spin.

Définition 4.1.7. Soit (V, q) un espace quadratique de signature (s, t) . Le groupe de spin de V est un revêtement double du groupe spécial orthogonal $SO(V)$. On le note $Spin(V)$ ou encore $Spin(s, t)$ car il ne dépend que de la signature de l'espace quadratique.

Des isométries sur l'espace de matrices V sont données par les opérations de conjugaison. Pour $G \in SL_2(\mathbb{R})$ On considère la fonction :

$$\begin{aligned} f_G: V &\rightarrow V \\ M &\mapsto GMG^{-1} \end{aligned}$$

Proposition 4.1.8. Pour $G \in SL_2(\mathbb{R})$, la fonction f_G est une isométrie de V de discriminant 1.

Démonstration. Tout d'abord soulignons que f_G va bien de V dans V car :

$$\forall M \in V \quad \text{Tr}(f_G(M)) = \text{Tr}(GMG^{-1}) = \text{Tr}(M) = 0$$

Ensuite il s'agit bien d'une isométrie car $q(f_G(M)) = -\det(GMG^{-1}) = -\det(M) = q(M)$. Enfin le calcul du déterminant de f_G donne :

$$\forall G = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{R}) \quad \det(f_G) = (ad - bc)^2 = 1$$

Donc finalement $f_G \in SO(V)$. □

On a donc trouvé une famille d'isométries de V . Cela amène à considérer la fonction :

$$\begin{aligned} \phi: SL_2(\mathbb{R}) &\rightarrow SO(V) \\ G &\mapsto f_G \end{aligned}$$

Proposition 4.1.9.

$$\text{Spin}(V) = \text{Spin}(2, 1) = SL_2(\mathbb{R})$$

Démonstration. Dans la base $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$ de V , on a :

$$\forall G = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{R}) \quad \text{Mat}(f_G) = \begin{bmatrix} ad + bc & -ac & bd \\ -2ab & a^2 & -b^2 \\ 2cd & -c^2 & d^2 \end{bmatrix}$$

On voit alors rapidement que $\text{Ker}(\phi) = \pm I_2$. De plus ϕ est surjective mais nous ne démontrons pas cette partie. On a donc la suite exacte suivante :

$$1 \rightarrow \pm I_2 \rightarrow SL_2(\mathbb{R}) \rightarrow SO(V) \rightarrow 1$$

Cela montre précisément que $\text{Spin}(V) = SL_2(\mathbb{R})$ □

4.1.3 • ESPACE SYMÉTRIQUE

Un autre espace qu'il est intéressant de calculer est l'espace symétrique associé à V .

Définition 4.1.10. Soit (V, q) un espace quadratique de signature (s, t) . La grassmannienne de V est l'ensemble des sous-espaces définis positifs de V de dimension maximale (c'est à dire de dimension s). On la note $Gr(V)$.

Remarque 4.1.11. En passant au sous-espace orthogonal on a que $Gr(V)$ est isomorphe à l'ensemble des sous-espaces définis négatifs de V de dimension maximale. (c'est à dire de dimension t).

Calculons la grassmannienne de notre espace quadratique (V, q) . Avec la remarque précédente on a que $Gr(V)$ est isomorphe à l'ensemble des droites vectorielles de V définies négatives. Soit $M = \begin{bmatrix} b & 2c \\ -2a & -b \end{bmatrix}$ un élément non-nul d'une telle droite. On a donc $q(M) = b^2 - 4ac < 0$ donc $a \neq 0$. Ainsi quitte à multiplier par un réel on peut supposer sans perte de généralité que M est de la forme $M = \begin{bmatrix} x & x_2 \\ 1 & -x \end{bmatrix}$. Comme $-\det(M) < 0$ il existe un unique $y > 0$ tel que $M = \begin{bmatrix} x & -(x^2 + y^2) \\ 1 & -x \end{bmatrix}$. Finalement :

$$Gr(V) \cong \left\{ Vect \left(P_{x+iy} = \begin{bmatrix} x & -(x^2 + y^2) \\ 1 & -x \end{bmatrix} \right) \mid x + iy \in \mathbb{H} \right\}$$

Il vient donc directement la proposition suivante.

Proposition 4.1.12.

$$Gr(V) \cong \mathbb{H}$$

où \mathbb{H} désigne le demi-plan de Poincaré.

Comme une isométrie envoie un plan défini positif sur un autre plan défini positif, on a que $Spin(V)$ agit naturellement sur $Gr(V)$.

Proposition 4.1.13. $Spin(V) \cong SL_2(\mathbb{R})$ agit sur $Gr(V) \cong \mathbb{H}$ et l'action induite est :

$$\forall G = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{R}), \forall z \in \mathbb{H} \quad G.z = \frac{az + b}{cz + d}$$

Démonstration. Il suffit simplement de calculer l'action induite pour des générateurs simples de $SL_2(\mathbb{R})$. On a :

Elément de $SL_2(\mathbb{R})$	$G.(x, y) = f_G(P_{x+iy})$	$G.z$ (avec $z = x + iy$)
$T_a = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$T_a.(x, y) = (x + a, y)$	$T_a.z = z + a$
$D_a = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix}$	$D_a.(x, y) = (a^2x, a^2y)$	$D_a.z = a^2z$
$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$	$S.(x, y) = (-\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$	$S.z = -\frac{1}{z}$
$G = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = S.T_{-\frac{c}{a}}.S.D_a.T_{\frac{b}{a}}$	$G.(x, y) = (Re(\frac{az+b}{cz+d}), Im(\frac{az+b}{cz+d}))$	$G.z = \frac{az+b}{cz+d}$

□

4.1.4 • LIEN AVEC LA FONCTION $A(x)$

A travers notre étude de l'espace quadratique V de signature $(2, 1)$ nous avons retrouvé plusieurs éléments qui étaient déjà apparus plus tôt dans le rapport.

1. La formule du discriminant $D = b^2 - 4ac$ se trouve être la forme quadratique de l'espace (V, q) .
2. Le demi-plan de Poincaré \mathbb{H} sur lequel sont définies les formes modulaires se révèle être l'espace symétrique $Gr(V)$.
3. L'action de $SL_2(\mathbb{Z})$ sur les symboles modulaires $E_D(x, y)$ est en réalité la même que celle de $SL_2(\mathbb{R}) = Spin(V)$ sur le bord de \mathbb{H} qui est en réalité $\overline{\mathbb{R}} \cong \partial Gr(V)$. Avec :

$$\partial Gr(V) \cong \left\{ Vect \left(P_x = \begin{bmatrix} x & -x^2 \\ 1 & -x \end{bmatrix} \right) \mid x \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ Vect \left(P_\infty = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \right\}$$

Il ne reste donc plus qu'à retrouver la fonction $A(x)$ de la partie 1.1.

Soit $M_{a,b,c} = \begin{bmatrix} b & 2c \\ -2a & -b \end{bmatrix} \in V$ et $P_x = \begin{bmatrix} x & -x^2 \\ 1 & -x \end{bmatrix} \in \partial Gr(V)$. On note ϕ la forme bilinéaire associée à la forme quadratique q comme dans la définition 4.1.1. Le produit $\phi(M_{a,b,c}, P_x)$ donne :

$$\langle M_{a,b,c} \mid P_x \rangle = ax^2 + bx + c$$

Nous sommes à présent en mesure d'écrire la fonction A_D du chapitre 1 avec les notations de notre espace quadratique (V, q) .

$$A_D(x) = \sum_{\substack{M_{a,b,c} \in V(\mathbb{Z}) \\ q(M_{a,b,c})=D \\ a < 0}} \max(0, \langle M_{a,b,c} \mid P_x \rangle) \tag{4.1}$$

où $V(\mathbb{Z})$ désigne l'ensemble des matrices de V à coefficients entiers.

4.2 ESPACE QUADRATIQUE DE SIGNATURE (3, 1)

Maintenant que nous avons vu les liens entre les objets rencontrés jusqu'à présent et les espaces quadratiques de signature (2, 1). Il est naturel de chercher à trouver leurs équivalents dans le monde des espaces quadratiques de signature (3, 1). En augmentant ainsi la dimension nous pouvons espérer trouver de nouveaux phénomènes surprenants semblables à ceux découverts dans le chapitre 1.

Comme à la section précédente, nous cherchons d'abord à exhiber un espace quadratique "de travail" de signature (3, 1).

Exemple 4.2.1. On pose l'opération $M^* = {}^t Com(M)$ (notons que pour $G \in SL_2(\mathbb{C})$, $G^* = G^{-1}$). Soit :

$$V = \left\{ M \in M_2(\mathbb{C}) \mid M^* = -\overline{M} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} \beta & 2c \\ -2a & -\overline{\beta} \end{bmatrix} \mid \begin{array}{l} a, c \in \mathbb{R} \\ \beta \in \mathbb{C} \end{array} \right\}$$

On pose $q = -det$. Ainsi pour $M \in V$ on a $q(M) = |\beta|^2 - 4ac$.
L'espace (V, q) est un espace quadratique de signature (3, 1).

Démonstration. V est clairement un espace vectoriel réel de dimension 4. Pour $M = \begin{bmatrix} \beta & 2c \\ -2a & -\overline{\beta} \end{bmatrix} \in V$, on a

$$q(M) = |\beta|^2 - 4ac = Re(\beta)^2 + Im(\beta)^2 + (a - c)^2 - (a + c)^2$$

donc $q = -det$ est une forme quadratique de signature (3, 1). \square

Dans le reste de la section 4.2 nous travaillerons avec cet espace quadratique (V, q) .

4.2.1 • GROUPE DE SPIN

Comme à la section 4.1.2 nous commençons par chercher une famille d'isométries en cherchant une opération proche de la conjugaison.

Pour $G \in SL_2(\mathbb{C})$ On considère la fonction :

$$\begin{aligned} f_G: V &\rightarrow V \\ M &\mapsto GM\overline{G^{-1}} \end{aligned}$$

Proposition 4.2.2. Pour $G \in SL_2(\mathbb{C})$, la fonction f_G est une isométrie de V de discriminant 1.

Démonstration. On a d'abord que f_G va bien de V dans V car :

$$\forall M \in V \quad f_G(M)^* = \overline{G^{-1}}^* M^* G^* = \overline{G(-\overline{M})} G^{-1} = -\overline{f_G(M)}$$

Ensuite il s'agit bien d'une isométrie car $q(f_G(M)) = -\det(GM\overline{G^{-1}}) = -\det(M) = q(M)$.
Enfin le calcul du déterminant de f_G donne :

$$\forall G = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{C}) \quad \det(f_G) = (ad - bc)^3 = 1$$

Donc finalement $f_G \in SO(V)$. □

On a donc trouvé une famille d'isométries de V . On pose ensuite la fonction :

$$\begin{aligned} \phi: SL_2(\mathbb{C}) &\rightarrow SO(V) \\ G &\mapsto f_G \end{aligned}$$

En étudiant la fonction ϕ de la même manière que en 4.1.2 on montre la proposition suivante.

Proposition 4.2.3.

$$Spin(V) = Spin(3, 1) = SL_2(\mathbb{C})$$

4.2.2 • ESPACE SYMÉTRIQUE

Comme pour la signature $(2, 1)$, on cherche maintenant à calculer l'espace symétrique associé à V .

Proposition 4.2.4.

$$Gr(V) \cong \left\{ Vect \left(P_{z+jr} = \begin{bmatrix} z & -(|z|^2 + r^2) \\ 1 & -\bar{z} \end{bmatrix} \right) \mid \begin{array}{l} z \in \mathbb{C} \\ r > 0 \end{array} \right\} \cong \mathbb{H}^{(3)}$$

Où $\mathbb{H}^{(3)}$ désigne le demi-plan $\{x + iy + jr \mid x, y \in \mathbb{R} \quad r \in \mathbb{R}^{+*}\}$ avec j le troisième élément de l'algèbre des quaternions.

Démonstration. La démonstration est semblable au calcul fait en 4.1.3. □

De même qu'en 4.1 le groupe de spin induit une action sur l'espace symétrique.

Proposition 4.2.5. $Spin(V) \cong SL_2(\mathbb{C})$ agit sur $Gr(V) \cong \mathbb{H}^{(3)}$ et l'action induite est :

$$\forall G = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{C}), \forall P \in \mathbb{H}^{(3)} \quad G.P = \frac{aP + b}{Pc + d} = \frac{(aP + b)\overline{(Pc + d)}}{|Pc + d|^2}$$

Remarque 4.2.6. L'algèbre des quaternions étant non-commutative, la notation sous forme de fraction est ambiguë. Quand nous notons $\frac{P}{Q}$ il faut toujours le comprendre comme $P.Q^{-1}$.

Démonstration. Comme à la section 4.1.3 on calcule l'action pour des éléments simples de $SL_2(\mathbb{C})$.

Elément de $SL_2(\mathbb{C})$	$G.(z, r) = f_G(P_{z+jr})$	$G.P$ (avec $P = z + jr$)
$T_a = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$T_a.(z, r) = (z + a, r)$	$T_a.P = P + a$
$D_a = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix}$	$D_a.(z, r) = (a^2z, a ^2y)$	$D_a.P = aPa$
$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$	$S.(z, r) = \left(-\frac{\bar{z}}{ z ^2+r^2}, \frac{r}{ z ^2+r^2}\right)$	$S.P = -\frac{1}{P}$

Ensuite on utilise le fait que pour $G = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{C})$, on peut écrire $G = S.T_{-\frac{c}{a}}.S.D_a.T_{\frac{b}{a}}$.

Alors en composant les actions déjà calculées on a :

$$G.(z, r) = \left(\frac{(az + b)\overline{(cz + d)} + a\bar{c}r^2}{|cz + d|^2 + |c|^2r^2}, \frac{r}{|cz + d|^2 + |c|^2r^2} \right)$$

ce qui correspond à l'action classique de $SL_2(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{H}^{(3)}$ que l'on retrouve dans [3]. Et en terme d'action sur l'algèbre des quaternions on retrouve bien :

$$G.P = \frac{aP + b}{Pc + d}$$

□

4.2.3 • GÉNÉRALISATION DE LA FONCTION $A(x)$

Nous sommes parvenus à mener la même étude dans un espace quadratique de signature (3, 1) que dans l'espace de signature (2, 1). Essayons à présent d'appliquer la formule 4.1 avec les objets de signature (3, 1) pour voir si on trouve une fonction avec des propriétés aussi surprenantes que la fonction $A(x)$ de la partie 1.1. On a :

$$V(\mathbb{Z}) = \left\{ M_{a,\beta,c} = \begin{bmatrix} \beta & 2c \\ -2a & -\bar{\beta} \end{bmatrix} \mid \begin{array}{l} a, c \in \mathbb{Z} \\ \beta \in \mathbb{Z}[i] \end{array} \right\}$$

$$\partial Gr(V) \cong \left\{ Vect \left(P_z = \begin{bmatrix} z & -|z|^2 \\ 1 & -\bar{z} \end{bmatrix} \right) \mid z \in \mathbb{C} \right\} \cup \left\{ Vect \left(P_\infty = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \right\}$$

$$\forall M_{a,\beta,c} \in V, P_z \in \partial Gr(V) \quad \langle M_{a,\beta,c} \mid P_z \rangle = a|z|^2 + Re(\bar{\beta}z) + c$$

Donc, en utilisant la formule 4.1, la définition équivalente de $A_D(x)$ pour la signature (3, 1) est :

$$A_D(z) = \sum_{\substack{a, c \in \mathbb{Z} \\ \beta \in \mathbb{Z}[i] \\ |\beta|^2 - 4ac = D \\ a < 0}} \max(0, a|z|^2 + \operatorname{Re}(\bar{\beta}z) + c) \quad (4.2)$$

ou encore, en posant $z = z_x + iz_y$ et $\beta = b_1 + ib_2$:

$$A_D(z) = \sum_{\substack{a, b_1, b_2, c \in \mathbb{Z} \\ b_1^2 + b_2^2 - 4ac = D \\ a < 0}} \max(0, a|z|^2 + b_1z_x + b_2z_y + c) \quad (4.3)$$

4.3 GÉNÉRALISATION DES RÉSULTATS

Il s'agit à présent de voir si cette fonction $A_D(z)$ possède des propriétés aussi surprenantes que la fonction $A_D(x)$ du premier chapitre.

4.3.1 • CONSTANCE

Définition 4.3.1. Soit $D \in \mathbb{N}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on définit :

$$E_D(z) = \left\{ P(z) = a|z|^2 + b_1z_x + b_2z_y + c \mid \begin{array}{l} a, b_1, b_2, c \in \mathbb{Z} \\ b_1^2 + b_2^2 - 4ac = D \\ a < 0 < P(z) \end{array} \right\}$$

et on a alors :

$$A_D(z) = \sum_{P \in E_D(z)} P(z) = \sum_{\substack{a, b_1, b_2, c \in \mathbb{Z} \\ b_1^2 + b_2^2 - 4ac = D \\ a < 0}} \max(0, a|z|^2 + b_1z_x + b_2z_y + c)$$

Commençons par calculer quelques valeurs de $A_D(z)$.

Exemple 4.3.2. Dans l'exemple ainsi que dans la suite de la section, nous utiliserons la notation abrégée $[a, b_1, b_2, c]$ pour désigner la fonction $P(z) = a|z|^2 + b_1z_x + b_2z_y + c$.

$E_6(0)$	$P(0)$	$A_6(0)$
$[-1, -1, -1, 1]$	1	4
$[-1, -1, 1, 1]$	1	
$[-1, 1, -1, 1]$	1	
$[-1, 1, 1, 1]$	1	

$E_6(1+i)$	$P(1+i)$	$A_6(1+i)$
$[-1, 1, 1, 1]$	1	4
$[-1, 1, 3, -1]$	1	
$[-1, 3, 1, -1]$	1	
$[-1, 3, 3, -3]$	1	

$E_6(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}i)$	$P(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}i)$	$A_6(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}i)$
$[-1, 1, -1, 1]$	0.80556	4
$[-1, 1, 1, 1]$	1.47222	
$[-1, 3, 1, -1]$	0.47222	
$[-1, 1, 3, -1]$	0.13889	
$[-1, -1, 1, 1]$	0.47222	
$[-3, 3, 3, -1]$	0.41667	
$[-17, 15, 11, -5]$	0.02778	
$[-15, 15, 9, -5]$	0.08333	
$[-5, 5, 1, -1]$	0.02778	
$[-17, 19, 11, -7]$	0.02778	
$[-29, 29, 21, -11]$	0.02778	
$[-53, 53, 35, -19]$	0.02778	

TABLE 11 – Quelques valeurs de $A_6(z)$

Il semble que $A_6(z)$ soit constante égale à 4. On retrouve le phénomène du théorème 3.

Théorème 17. Soit $D \in \mathbb{N}$ qui n'est pas somme de deux carrés. Il existe un entier α_D tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad A_D(z) = \alpha_D \quad (4.4)$$

et de plus on a la formule :

$$\alpha_D = \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{Z}[i] \\ |\beta|^2 < D \\ |\beta|^2 \equiv D \pmod{4}}} \sigma_1\left(\frac{D - |\beta|^2}{4}\right) \quad (4.5)$$

Démonstration. On commence par noter que A_D est 1-périodique et i -périodique. Ensuite, en faisant un calcul similaire à celui de la preuve élémentaire développée en 2.1.1, on peut montrer que

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad |z|^2(A_D(\frac{1}{z}) - A_D(0)) = A_D(z) - A_D(0) \quad (4.6)$$

Puis, en utilisant la division euclidienne de $\mathbb{Z}[i]$, on prouve que

$$\forall z \in \mathbb{Q}(i) \quad A_D(z) = A_D(0) \quad (4.7)$$

Enfin en admettant pour l'instant la continuité on a que A_D est constante égale à $A_D(0)$. Le calcul de $\alpha_D = A_D(0)$ est similaire à celui de la preuve de 1.2.5. \square

On retrouve donc bien des résultats semblables à ceux du premier chapitre. Et les similarités ne s'arrêtent pas là.

Définition 4.3.3. Soit $z \in \mathbb{C}$ on définit :

$$B_D(x) = \sum_{P \in E_D(z)} P(z)^3 = \sum_{\substack{a, b_1, b_2, c \in \mathbb{Z} \\ b_1^2 + b_2^2 - 4ac = D \\ a < 0}} \max\left(0, (a|z|^2 + b_1 z_x + b_2 z_y + c)^3\right)$$

ainsi que :

$$C_D(x) = \sum_{P \in E_D(z)} P(z)^5 = \sum_{\substack{a, b_1, b_2, c \in \mathbb{Z} \\ b_1^2 + b_2^2 - 4ac = D \\ a < 0}} \max\left(0, (a|z|^2 + b_1 z_x + b_2 z_y + c)^5\right)$$

On a les résultats suivants.

Théorème 18. Soit $D \in \mathbb{N}$ qui n'est pas somme de deux carrés. On a :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad B_D(z) = \beta_D \tag{4.8}$$

où β_D est l'entier défini par la formule :

$$\beta_D = \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{Z}[i] \\ |\beta|^2 < D \\ |\beta|^2 \equiv D \pmod{4}}} \sigma_3\left(\frac{D - |\beta|^2}{4}\right) \tag{4.9}$$

Ce théorème se prouve de manière élémentaire tout comme celui de la constance de $A_D(z)$ mais avec davantage de calculs. Nous ne l'écrivons pas ici.

Nous donnons ensuite une conjecture basée sur des résultats numériques mais que nous n'avons pas eu le temps de prouver rigoureusement.

Conjecture 2. Pour $D \in \mathbb{N}$ qui n'est pas somme de deux carrés, il existe deux entiers γ_D et δ_D tels que

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad C_D(z) = \gamma_D + \delta_D \cdot \phi(z)$$

où ϕ est une fonction qui ne dépend que de z et où

$$\gamma_D = C_D(0) = \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{Z}[i] \\ |\beta|^2 < D \\ |\beta|^2 \equiv D \pmod{4}}} \sigma_5\left(\frac{D - |\beta|^2}{4}\right) \tag{4.10}$$

4.3.2 • CORPS QUADRATIQUE IMAGINAIRE

Les formules de α_D , de β_D et de γ_D sont très similaires à celles obtenues au chapitre 1. Il semble simplement que nous avons remplacé $b \in \mathbb{Z}$ par $\beta \in \mathbb{Z}[i]$. L'ensemble $\mathbb{Z}[i]$ des entiers de Gauss étant l'ensemble des entiers du corps quadratique imaginaire euclidien $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ nous pouvons nous demander si le résultat subsiste pour d'autres corps quadratiques imaginaires.

Définition 4.3.4. Soit $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ un corps quadratique imaginaire. Nous notons \mathcal{O}_d l'ensemble de ses entiers et N sa norme associée :

$$\forall \beta = b_1 + b_2\sqrt{-d} \in \mathcal{O}_d \quad N(\beta) = b_1^2 + d.b_2^2$$

Grâce à la formule 4.2 on peut définir naturellement la fonction $A_D(z)$ pour tous les corps quadratiques imaginaires.

Définition 4.3.5. Soit $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ un corps quadratique imaginaire et $D \in \mathbb{N}$. On pose :

$$A_{D, \mathbb{Q}(\sqrt{-d})}(z) = \sum_{\substack{a, c \in \mathbb{Z} \quad \beta \in \mathcal{O}_d \\ N(\beta) - 4ac = D \\ a < 0}} \max(0, a|z|^2 + \operatorname{Re}(\bar{\beta}z) + c)$$

On a alors le résultat suivant.

Théorème 19. Soit $D \in \mathbb{N}$ qui n'est pas la norme d'un élément de \mathcal{O}_d . Si $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ est euclidien, il existe un entier $\alpha_{D, \mathbb{Q}(\sqrt{-d})}$ tel que :

$$\forall z \in \mathbb{R} \quad A_{D, \mathbb{Q}(\sqrt{-d})}(z) = \alpha_{D, \mathbb{Q}(\sqrt{-d})} \quad (4.11)$$

et de plus on a la formule :

$$\alpha_{D, \mathbb{Q}(\sqrt{-d})} = \sum_{\substack{\beta \in \mathcal{O}_d \\ N(\beta) < D \\ N(\beta) \equiv D [4]}} \sigma_1\left(\frac{D - N(\beta)^2}{4}\right) \quad (4.12)$$

Démonstration. Une preuve est donnée dans [5]. Intuitivement, on voit que la condition que le corps soit euclidien est importante car c'est ce qui permet de passer de 4.6 à 4.7 dans la preuve élémentaire de la constance de $A_D(z)$. \square

4.3.3 • SYMBOLES MODULAIRES

Tout comme dans le chapitre 3 en 3.2.3, on peut définir des symboles modulaires à partir des fonctions $A_D(z)$.

Définition 4.3.6. Soit $D \in \mathbb{N}$ et $z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{C}}$. On pose :

$$E_D(z_1, z_2) = (+) \left\{ P = [a, \beta, c] \left| \begin{array}{l} a < 0 \\ P(z_1) > 0 > P(z_2) \\ |\beta|^2 - 4ac = D \end{array} \right. \right\} \cup (-) \left\{ P = [a, \beta, c] \left| \begin{array}{l} a < 0 \\ P(z_2) > 0 > P(z_1) \\ |\beta|^2 - 4ac = D \end{array} \right. \right\}$$

où $(+)$ et $(-)$ sont des signes formels comme en 3.2.3.

Une fois encore nous pouvons voir $E_D(z_1, z_2)$ comme l'ensemble des polynômes qui "séparent" z_1 et z_2 dans le sens où $P(z_1)$ et $P(z_2)$ n'ont pas le même signe.

Tout comme sur \mathbb{R} on dispose sur \mathbb{C} d'un algorithme de décomposition en fraction continue développé par Hürwitz (voir [8]). A chaque complexe z on peut associer une suite $(n_k)_{k \geq 0}$ d'éléments de $\mathbb{Z}[i]$ qui est unique car le corps $\mathbb{Q}(i)$ est euclidien. En utilisant cela on a alors un théorème équivalent au théorème 13.

Théorème 20. *Soit $z \in \mathbb{C}$ qui a pour développement en fraction continue $[n_0, n_1, \dots]$. On peut calculer $E_D(z)$ avec la formule :*

$$E_D(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(E_D(0) \mid T^{(-1)^{i+1} \cdot n_i} S \dots S T^{n_1} S T^{-n_0} \right)$$

où la somme est à comprendre comme la somme formelle sur les éléments de $E_D(z, \infty)$ en prenant en compte leur signe $(+)$ ou $(-)$.

On fait ici un léger abus de notation en écrivant

$$T^{x+iy} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^x \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^y = \begin{bmatrix} 1 & x+iy \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ce théorème permet à la fois d'établir un algorithme de calcul efficace pour $A_D(z)$ et de prouver la continuité de la fonction.

5 PISTES D'EXPLORATION ET CONCLUSION

5.1 VISION GÉOMÉTRIQUE

Commençons par réécrire $A_D(x)$ avec des formes canoniques pour interpréter géométriquement les objets.

Remarque 5.1.1. Constance de $A_D(x)$:

$$A_D(x) = \sum_{\substack{a,b,c \in \mathbb{Z} \\ b^2 - 4ac = D \\ a < 0}} \max \left(0, a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{D}{4a^2} \right) \right) \quad \text{est constante pour } D \neq n^2$$

Symboles modulaires $E_D(x, y)$:

$$E_D(x, y) \approx \{P = [a, b, c] \mid \text{Zeros}(P) \text{ est une 0-sphère qui sépare } x \text{ et } y\}$$

Regardons de plus près les fonctions $P(z) = a|z|^2 + b_1 z_x + b_2 z_y + c$ qui apparaissent dans la définition de $A_D(z)$ en 4.3.1. Avec $\beta = b_1 + ib_2 \in \mathbb{Z}[i]$ et $z = z_x + iz_y$ on a :

$$\begin{aligned} P(z) &= a|z|^2 + b_1 z_x + b_2 z_y + c \\ &= az_x^2 + b_1 z_x + az_y^2 + b_2 z_y + c \\ &= a \left(\left(z_x + \frac{b_1}{2a} \right)^2 + \left(z_y + \frac{b_2}{2a} \right)^2 - \frac{b_1^2 + b_2^2 - 4ac}{4a^2} \right) \\ &= a \left(\left| z + \frac{\beta}{2a} \right|^2 - \frac{D}{4a^2} \right) \end{aligned}$$

Les fonctions $P = [a, \beta, c]$ admettent une forme canonique proche de celle des trinômes. On peut ainsi réinterpréter les résultats obtenus jusqu'alors.

Remarque 5.1.2. Constance de $A_D(z)$:

$$A_D(z) = \sum_{\substack{a,c \in \mathbb{Z} \beta \in \mathbb{Z}[i] \\ |\beta|^2 - 4ac = D \\ a < 0}} \max \left(0, a \left(\left| z + \frac{\beta}{2a} \right|^2 - \frac{D}{4a^2} \right) \right) \quad \text{est constante pour } D \neq m^2 + n^2$$

Symboles modulaires $E_D(z_1, z_2)$:

$$E_D(z_1, z_2) \approx \{P = [a, \beta, c] \mid \text{Zeros}(P) \text{ est une 1-sphère qui sépare } z_1 \text{ et } z_2\}$$

Cette remarque est dans la continuité de 5.1.1. Elle appelle à continuer la généralisation en augmentant la dimension.

Définition 5.1.3. Soit $D \in \mathbb{N}$. Pour $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ on note $\|\mathbf{x}\|$ la norme euclidienne de \mathbf{x} . On définit :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \quad A_D^{(3)}(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{a, c \in \mathbb{Z} \quad \mathbf{b} \in \mathbb{Z}^3 \\ \|\mathbf{b}\|^2 - 4ac = D \\ a < 0}} \max \left(0, a \left(\left\| \mathbf{x} + \frac{\mathbf{b}}{2a} \right\|^2 - \frac{D}{4a^2} \right) \right)$$

On peut alors facilement définir des symboles modulaires associés $E_D(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ tels que

$$E_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \approx \{P = [a, \mathbf{b}, c] \mid \text{Zeros}(P) \text{ est une 2-sphère qui sépare } \mathbf{x} \text{ et } \mathbf{y}\}$$

Théorème 21. Soit $D \in \mathbb{N}$ qui n'est pas somme de trois carrés. Il existe un entier $\alpha_D^{(3)}$ tel que :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \quad A_D^{(3)}(\mathbf{x}) = \alpha_D^{(3)}$$

et de plus on a la formule :

$$\alpha_D^{(3)} = \sum_{\substack{\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^3 \\ \|\mathbf{b}\|^2 < D \\ \|\mathbf{b}\|^2 \equiv D \pmod{4}}} \sigma_1 \left(\frac{D - \|\mathbf{b}\|^2}{4} \right)$$

Cette direction de généralisation semble être prometteuse car nous obtenons de nouveau une fonction constante pour $D \neq l^2 + m^2 + n^2$. Toutefois si nous continuons la généralisation en définissant une fonction similaire $A_D^{(d)}$ sur \mathbb{R}^d avec $d \geq 4$, nous allons trouver que $A_D^{(d)}$ est constante pour des valeurs de D qui ne sont pas somme de d carrés d'entiers. Or le théorème des 4 carrés de Lagrange nous indique qu'il n'existe pas de tels $D \in \mathbb{N}$ dès lors que $d \geq 4$. Il faut alors ajouter des termes correctifs faisant intervenir des polynômes de Bernoulli comme dans 2.1.8 pour garder la constance de $A_D^{(d)}$.

Une autre direction de généralisation possible serait de choisir un réseau de \mathbb{R}^3 différent de \mathbb{Z}^3 pour les valeurs de \mathbf{b} .

Conjecture 3. Soit $d \in \{1, 2, 3\}$ et $D \in \mathbb{N}$ qui n'est pas une somme de d carrés. On note

$\|\cdot\|$ la norme euclidienne de \mathbb{R}^d . Soit L un réseau de \mathbb{R}^d . La fonction :

$$A_D^{(d)}(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{a,c \in \mathbb{Z} \\ \|\mathbf{b}\|^2 - 4ac = D \\ a < 0}} \max \left(0, a \left(\left\| \mathbf{x} + \frac{\mathbf{b}}{2a} \right\|^2 - \frac{D}{4a^2} \right) \right)$$

est constante.

Nous avons montré le résultat pour des réseaux de la forme $\frac{p}{q} \cdot \mathbb{Z}^d$ grâce à un changement de variable dans la démonstration élémentaire de la constance de A_D . Il s'agit de voir ensuite si le résultat subsiste pour des réseaux plus complexes.

5.2 APPLICATION À LA PHYSIQUE ?

Nous donnons dans cette partie une tentative non aboutie de relier notre travail à la physique.

Nous avons vu au chapitre précédent que la fonction $A_D(z) = A_D^{(2)}(z)$ était liée aux espaces quadratiques de signature $(3, 1)$. De tels espaces, appelés "espaces de Minkowski", apparaissent naturellement en physique en relativité. Il semble intéressant d'essayer d'appliquer nos formules à la physique pour voir si les phénomènes surprenants de constances s'interprètent physiquement. Nous pouvons par exemple imaginer que la constance de A_D , qui est non triviale, puisse s'interpréter comme une simple conservation de l'énergie d'un système en physique. Inversement, si notre formule de A_D se réécrit avec des grandeurs physiques comme une fonction non triviale, nous aurons exhibé une quantité physique constante et non triviale. Il sera alors intéressant d'essayer de mesurer expérimentalement cette quantité pour vérifier sa constance.

A la fin de la partie 4.2 nous avons obtenu la formule suivante pour A_D :

$$A_D(z) = \sum_{\substack{M_{a,b_1,b_2,c} \in V(\mathbb{Z}) \\ q(M_{a,b_1,b_2,c}) = D \\ a < 0}} \max(0, \langle M_{a,b_1,b_2,c} | P_z \rangle)$$

En physique l'espace de Minkowski que nous considérerons est l'espace V des quadrivecteurs énergie-impulsion. Ainsi un élément M de V sera un quadrivecteur $(\vec{p}, \frac{E}{c})$. On muni cet espace de la norme de Minkowski classique de signature $(3, 1)$:

$$q(\vec{p}, \frac{E}{c}) = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - (\frac{E}{c})^2 = -(mc)^2$$

L'espace symétrique associé $Gr(V)$ se trouve être l'espace de tous les quadrivecteurs de particules de masse positive et d'énergie E_0 (une énergie fondamentale). Et donc $\partial Gr(V)$ est l'espace des quadrivecteurs $(\vec{p}_0, \frac{E_0}{c})$ de particules de masse nulle (comme les photons par exemple) et d'énergie E_0 .

Le produit scalaire entre un élément $M = (\vec{p}, \frac{E}{c})$ de V et un élément $P = (\vec{p}_0, \frac{E_0}{c})$ de $\partial Gr(V)$ s'interprète comme un quadriscaire. En physique relativiste, les quantités quadriscaires ont l'avantage d'être invariantes par changement de référentiel.

On montre enfin que la condition $a < 0$ peut être remplacée par la condition $E > 0$. Condition rassurante en physique car toutes les particules doivent avoir une énergie positive.

Nous aboutissons alors à la formule :

$$A_D(\vec{p}_0) = \sum_{\substack{(\vec{p}, \frac{E}{c}) \in \mathbb{Z}^4 \\ -(mc)^2 = D \\ E > 0}} \max\left(0, \left\langle (\vec{p}, \frac{E}{c}) \mid (\vec{p}_0, \frac{E_0}{c}) \right\rangle\right) \quad (5.1)$$

Et cette fonction est constante pour tout \vec{p}_0 sur la sphère $S^2(0, \frac{E_0}{c})$.

Toutefois cette formule comporte deux inconvénients. Le premier est le fait que nous sommes sur des quadrivecteurs $(\vec{p}, \frac{E}{c})$ à valeurs discrètes car nous les prenons dans \mathbb{Z}^4 (ou de manière équivalente, dans un réseau de \mathbb{R}^4). Or en physique relativiste les grandeurs sont continues. Il existe néanmoins une théorie visant à unifier la relativité et la mécanique quantique appelée "Gravité quantique à boucle" qui stipule le fait que l'univers est formé de "petites briques" d'espace-temps et cela impliquerait donc une discrétisation des valeurs que peuvent prendre les quadrivecteurs $(\vec{p}, \frac{E}{c})$ (voir [2]). Cependant cette théorie n'est pas encore suffisamment développée et vérifiée expérimentalement.

Le second problème est beaucoup plus simple et sans appel, pendant tout le rapport nous avons pris $D \in \mathbb{N}$. Or dans 5.1, si on prend $D \in \mathbb{N}$, on se retrouve à sommer sur des particules dont la masse doit être imaginaire pure, ce qui n'existe pas physiquement. Si on décide de prendre D négatif, il est aisé de voir avec la formule de la remarque 5.1.2 que la somme sera trivialement nulle.

Même en cherchant dans d'autres domaines comme les équations d'onde, nous ne sommes pas parvenus à trouver un contexte physique où nous aurions un espace de Minkowski de signature $(3, 1)$ dans lequel il existerait des objets physiques de norme strictement positive.

5.3 CONCLUSION

Dans ce travail, nous avons réussi à reprendre la découverte de Zagier [11] et à la développer en exhibant des symboles modulaires et en la généralisant en dimension supérieure. Bien que nous ayons trouvé une formule pour A_D qui semble valable pour les espaces quadratiques de signature $(n - 1, 1)$, nous n'avons pas encore mis à jour la raison profonde de la constance de celle-ci. Le produit entre un élément de l'espace quadratique V avec un élément du bord de l'espace symétrique associé $\partial Gr(V)$ reste encore mystérieux. Nous avons néanmoins donné

des voies de généralisations ainsi que des algorithmes efficaces de calcul de cette fonction qui pourront aider à mieux comprendre les phénomènes observés.

RÉFÉRENCES

- [1] Richard E BORCHERDS : Modular forms : Classification. <https://youtu.be/JdS37MB7FD4>, 2021. Online graduate course on modular forms.
- [2] Xavier CHARTRAND et Élie DUMAS-LEFEBVRE : *La gravité quantique*. Université de Laval, 2018.
- [3] Jürgen ELSTRODT, Fritz GRUNEWALD et Jens MENNICKE : *Groups Acting on Hyperbolic Space*. Springer Berlin, Heidelberg, 1997.
- [4] Henryk IWANIEC : *Topics in Classical Automorphic Forms*. American Mathematical Society, 1991.
- [5] Cihan KARABULUT : From binary hermitian forms to parabolic cocycle of euclidean bianchi groups. https://www.researchgate.net/publication/350310980_From_Binary_Hermitian_Forms_to_parabolic_cocycles_of_Euclidean_Bianchi_groups, 2021.
- [6] Marie-Pierre LEBAUD : Formes quadratiques. <https://perso.univ-rennes1.fr/marie-pierre.lebaud/agint/ecrit/algebre-lineaire/formes-quadratiques/index.html>. Préparation à l'agrégation interne, Université de Rennes 1.
- [7] Ludovic MARQUIS : Une introduction à la géométrie hyperbolique. https://perso.univ-rennes1.fr/ludovic.marquis/enseign/2017-18/GHYP_2017/GHYP_2017.html. Notes de cours de l'Université de Rennes 1.
- [8] Gerardo González ROBERT : Good's theorem for hurwitz continued fractions. <https://arxiv.org/abs/1806.11331?context=math>, 2021.
- [9] Jean-Pierre SERRE : *Cours d'arithmétique*. Presses universitaires de France, 1970.
- [10] William A. STEIN : *Modular Forms : A Computational Approach*. Graduate Studies in Mathematics, 1991.
- [11] Don ZAGIER : From quadratic functions to modular functions. *Number Theory in Progress. Vol 2*, 1999.