Corrigé DM 3

Exercice 1 : À partir de la définition prouver que :

1. $\lim_{x \to x_0} x^3 + 5x + 1 = x_0^3 + 5x_0 + 1$

On doit prouver que $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon$ tel que si $|x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |x^3 + 5x + 1 - (x_0^3 + 5x_0 + 1)| < \varepsilon$.

On a $|x^3 + 5x + 1 - (x_0^3 + 5x_0 + 1)| = |x^3 - x_0^3 + 5(x - x_0)| = |(x - x_0)(x^2 - xx_0 + x_0^2) + 5(x - x_0)| =$
$= |x - x_0|\,|x^2 - xx_0 + x_0^2 + 5|$

Si $|x - x_0| < \delta$ alors $|x^2 - xx_0 + x_0^2| = |(x - x_0)x + x_0^2| \le |x - x_0||x| + |x_0^2| \le \delta(|x_0| + |\delta|) \le \delta^2 + \delta|x_0| + x_0^2$

donc $|x^3 + 5x + 1 - (x_0^3 + 5x_0 + 1)| < \delta(5 + \delta^2 + \delta x_0 + x_0^2)$

De plus $\delta(5 + \delta^2 + \delta x_0 + x_0^2) < \delta(6 + 2x_0^2)$ pour $\delta < \min\{\frac{1}{2}, |x_0|\}$

Donc $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon$ tq $\delta_\varepsilon(5 + \delta_\varepsilon^2 + \delta_\varepsilon|x_0| + x_0^2) < \varepsilon$ (il suffit de choisir $\delta_\varepsilon = \min\{\frac{1}{2}, |x_0|, \frac{\varepsilon}{6 + 2x_0^2}\}$)

tel que si $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ $|x^3 + 5x + 1 - (x_0^3 + 5x_0 + 1)| < \varepsilon$.

2. $\lim_{x \to x_0} x^2 + 5x + 1 = x_0^2 + 5x_0 + 1$

On doit prouver que $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon$ tel que si $|x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |x^2 + 5x + 1 - (x_0^2 + 5x_0 + 1)| < \varepsilon$.

On a $|x^2 + 5x + 1 - (x_0^2 + 5x_0 + 1)| = |x^2 - x_0^2 + 5(x - x_0)| = |(x - x_0)(x + x_0) + 5(x - x_0)| =$
$= |x - x_0|\,|x + x_0 + 5|$.

Si $|x - x_0| < \delta$ alors $|x + x_0 + 5| < 5 + 2\delta$, donc $|x^2 + 5x + 1 - (x_0^2 + 5x_0 + 1)| < \delta(5 + 2\delta)$

De plus $\delta(5 + 2\delta) < 6\delta$ pour $\delta < \frac{1}{2}$.

Donc $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon$ tq $\delta_\varepsilon(5 + 2\delta_\varepsilon) < \varepsilon$ (il suffit de choisir $\delta_\varepsilon = \min\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{6}\}$)

tel que si $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ $|x^2 + 5x + 1 - (x_0^2 + 5x_0 + 1)| < \varepsilon$.

3. $\lim_{x \to +\infty} x^3 + 5x + 1 = +\infty$.

On doit prouver que si $\forall M > 0\ \exists P_M$ tel que si $x > P_M$ alors $x^3 + 5x + 1 > M$. Si $x > M \Rightarrow$
$x^3 + 5x + 1 > M^3 + M + 1 > M$. Donc il suffit de choisir $P_M = M$.

4. $\lim_{x\to-\infty} x^3+5x+1=-\infty$.

Il faut prouver que $\forall M>0\ \exists P_M<0$ tel que $\forall\ x<-P_M\quad x^3+5x+1<-M$.

Si $x<-M$, alors $x^3+5x+1<-M^3-5M+1<-M$. si $M<M_0$, par exemple si $M<-1$. Donc il suffit de choisir $P_M=\max\{M,1\}$.

5. $\lim_{x\to+\infty} x^2+5x+1=+\infty$.

Il faut prouver que $\forall M>0\ \exists P_M$ tel que si $x>P_M$ alors $x^2+5x+1>M$.

Si $x>M \Rightarrow x^2+5x+1>M^2+5M+1>M$. Donc il suffit de choisir $P_M=M$.

6. $\lim_{x\to-\infty} x^2+5x+1=+\infty$.

· Il faut prouver que $\forall M>0\ \exists\ P_M$ tel que si $x<-P_M$ alors $x^2+5x+1>M$.

Si $x<-M$ mais $x^2>M^2$, $5x<-5M$.

D'autre part si $x<-10 \Rightarrow x^2=\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}>\frac{x^2}{2}+5x$. Donc $x^2+5x+1>\frac{x^2}{2}+1>\frac{M^2}{2}>5M>M$

Donc il suffit de choisir $P_M=\max\{10,M\}$.

EXERCICE 2

Soit P un polynome $P(x)=\sum_{k=0}^{m} a_k x^k$ avec $a_m>0$.

1 Montrer que $\lim_{x\to x_0} P(x)=P(x_0)$

Il faut montrer que $\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta_\varepsilon$ tq si $|x-x_0|<\delta_\varepsilon$ alors $|P(x)-P(x_0)|<\varepsilon$.

On considère $P(x)-P(x_0)$. Puisque $P(x_0)-P(x_0)=0$, le polynôme $P(x)-P(x_0)$ est divisible par $(x-x_0)$. On peut donc écrire $P(x)-P(x_0)=(x-x_0)\,Q(x)$ où Q est un polynôme avec $\deg Q<\deg P$.

$|P(x)-P(x_0)|=|(x-x_0)|\,|Q(x)|$. Si $x_0-\delta<x<x_0+\delta$, on peut prouver facilement que $|Q(x)|<C_Q$

Pour cela il suffit de remarquer que chaque terme $a_n x^n$ peut se borner par $|a_n x^n|<|a_n|\,(|x_0|+\delta)^n$

Donc si on choisit $\delta_\varepsilon=\frac{\varepsilon}{C_Q}$, on a que $\forall\varepsilon>0$ $|P(x)-P(x_0)|<\varepsilon$ si $|x-x_0|<\delta_\varepsilon$.

2. $\lim_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$.

On doit montrer que $\forall M > 0\ \exists P_M$ tq si $x > P_M$ $P(x) > M$.

Si $x > R \Rightarrow P(x) = a_n x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_0 = x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \quad \cdots + \frac{a_0}{x^n} \right)$.

Pour $x > 1$ et $x > \frac{n}{a_n} a_k$ pour $k = 1, \dots, n-1$, on a $a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \cdots + \frac{a_0}{x^n} > \frac{a_n}{2}$

Donc, puisque $a_n > 0$, on a

$$P(x) = x^n \left(a_n + \cdots + \frac{a_0}{x^n} \right) > x^n \left(\frac{a_n}{2} \right) > R^n \frac{a_n}{2}$$

Donc il suffit de choisir

$P_M = \max \left\{ \sqrt[n]{\frac{2}{a_n} M},\ 1,\ \frac{n}{a_n} a_k,\ k = 0, \dots, n-1 \right\}$.

3. Si n pair $\lim_{x \to -\infty} P(x) = +\infty$

On doit montrer que $\forall M > 0\ \exists P_M$ tq si $x < -P_M$ $P(x) > M$.

Si $x < -R \Rightarrow P(x) = a_n x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_0 = x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \quad \cdots + \frac{a_0}{x^n} \right)$.

Pour $|x| > 1$ et $|x| > \frac{n}{a_n} a_k$ pour $k = 1, \dots, n-1$, on a $a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \cdots + \frac{a_0}{x^n} > \frac{a_n}{2}$

Donc, puisque $a_n > 0$, on a

$$P(x) = x^n \left(a_n + \cdots + \frac{a_0}{x^n} \right) > x^n \left(\frac{a_n}{2} \right).$$ Puisque n est pair, $x^n \left(\frac{a_n}{2} \right) > R^n \left(\frac{a_n}{2} \right)$.

Donc il suffit de choisir

$P_M = \max \left\{ \sqrt[n]{\frac{2}{a_n} M},\ 1,\ \frac{n}{a_n} a_k,\ k = 0, \dots, n-1 \right\}$.

4. Si n impair $\lim_{x \to -\infty} P(x) = -\infty$

De la même façon que au point 3, on a que

pour $|x| > 1$ et $|x| > \frac{n}{a_n} a_k$ pour $k = 1, \dots, n-1$, on a $a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \cdots + \frac{a_0}{x^n} < \frac{3a_n}{2}$ $\qquad a_n > 0$.

Donc, puisque $a_n > 0$, on a

$$P(x) = x^n \left(a_n + \cdots + \frac{a_0}{x^n} \right) < x^n \left(\frac{3a_n}{2} \right).$$ Puisque n est impair, $x^n \left(\frac{a_n}{2} \right) < R^n \left(\frac{a_n}{2} \right)$.

Donc il suffit de choisir

$P_M = \max \left\{ \sqrt[n]{\frac{2}{a_n} M},\ 1,\ \frac{n}{a_n} a_k,\ k = 0, \dots, n-1 \right\}$.

Exercice 3.

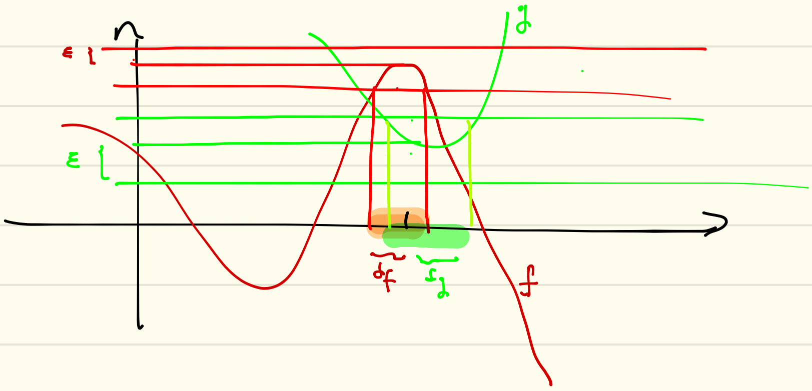
Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux applications continues en x_0. Montrer que $h = \min\{f, g\}$ est continue en x_0.

Sans perte de généralité, on peut supposer que $f(x_0) \geq g(x_0)$.

Supposons d'abord que $f(x_0) > g(x_0)$. Puisque f est continue $\exists\, \delta_f$ telle que si $|x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$. De même, il existe δ_g tel que si $|x - x_0| < \delta_g \Rightarrow g(x_0) - \varepsilon < g(x) < g(x_0) + \varepsilon$.

En particulier si $\varepsilon < \frac{f(x_0) - g(x_0)}{2}$, cela prouve que $f(x) > g(x)$ dans un voisinage de x_0 (c'est à dire sur $(x_0 - \eta, x_0 + \eta)$, $\eta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$.

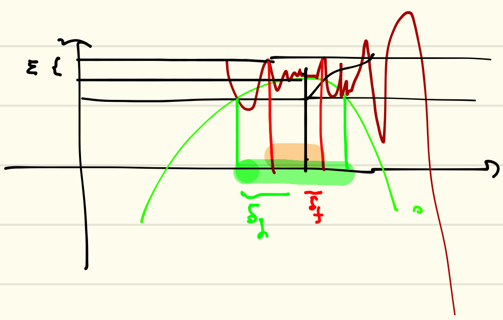
Donc $f(x) = h(x)$ pour $x \in (x_0 - \eta, x_0 + \eta)$; en particulier h est continue en x_0.



Supposons maintenant que $f(x_0) = g(x_0)$.

Alors si $|x - x_0| < \delta_f$ et $|x - x_0| < \delta_g$, $|h(x) - h(x_0)| < \varepsilon$. en tout point x.

Donc si on choisi $\delta_h = \min\{\delta_f, \delta_g\}$, on obtient que si $|x - x_0| < \delta_h$, alors $|h(x) - h(x_0)| < \varepsilon$.



Exercice 4

Etablir si les limites existent et si c'est le cas, les calculer.

1. $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} \cos x$

On remarque que

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{2\pi n} \cos(2\pi n) = \lim_{n \to +\infty} \sqrt{2\pi n} = +\infty.$$

mais $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = \lim_{n \to +\infty} 0 = 0.$

Donc si la limite existait, elle devrait être égale à $+\infty$ et aussi à $+\infty$. Par unicité de la limite, on en déduit que la limite n'existe pas.

2. $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} + \cos x$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} + \cos x = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left(1 + \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right)$$

Clairement $-\frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$; donc $\frac{\cos x}{\sqrt{x}} \to 0$.

donc $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left(1 + \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty.$

3. $\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x} + \cos x}{x - 5}$

On remarque $\sqrt{5} + \cos 5 > 4 > 0$.

$$\lim_{x \to 5^+} \frac{\sqrt{x} + \cos x}{x - 5} = \lim_{x \to 5^+} \frac{\sqrt{5} + \cos 5}{x - 5} = +\infty \neq -\infty = \lim_{x \to 5^-} \frac{\sqrt{5} + \cos 5}{x - 5} = \lim_{x \to 5^-} \frac{\sqrt{x} + \cos x}{x - 5}.$$

donc $\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x} + \cos x}{x - 5} = \nexists$

4. $\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x} + \cos x}{(x - 5)^2}$

$$\lim_{x \to 5^-} \frac{\sqrt{x} + \cos x}{(x - 5)^2} = \lim_{x \to 5^-} \frac{\sqrt{5} + \cos 5}{(x - 5)^2} = +\infty = \lim_{x \to 5^+} \frac{\sqrt{5} + \cos 5}{(x - 5)^2} = \lim_{x \to 5^+} \frac{\sqrt{x} + \cos x}{(x - 5)^2}.$$

Exercice 5

Établir si la fonction est continue en x_0.

1. $f(x) = x\sin x$ pour $x_0 = 0$.

$f(x)$ est produit de fonctions continues en 0, donc continue.

2. $f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

La fonction n'est pas définie en 0.

Donc on peut :

- interpreter la question de façon litterale, dans ce cas on peut repondre : la question n'a pas de sens car la fonction n'est pas définie.
- interpreter la question au sens large, c'est à dire se demander si la fonction admet un prolongement par continuité.

dans ce cas il faut établir si la fonction admet un prolongement par continuité ceci est vrai si et seulement si la $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ existe.

Or $-x \le x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \le x$, donc $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

donc f admet un prolongement par continuité.

3. $f(x) = |x-5|$ pour $x_0 = 5$

$\lim\limits_{x\to 5^+} |x-5| = \lim\limits_{x\to 5^+} x-5 = 0 = \lim\limits_{x\to 5^-} |x-5| = \lim -x+5$. Donc f continue.

4. $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & x<1 \\ 1+x & x\geq 1 \end{cases}$ en $x_0 = 1$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 1+x = 2 \neq 0 = \lim\limits_{x\to 1^-} 1-x^2 = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

Donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \nexists$, donc f n'est pas continue en 1.

5. $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & x<0 \\ 1+x & x\geq 0 \end{cases}$ en $x_0 = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 1+x = 1 = \lim\limits_{x\to 0^-} 1-x^2 = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$, donc f est continue en 1.

6. $f(x) = \dfrac{x^2 + \sin x}{x - 6}$ $\quad x_0 = 6$.

Comme au point 2, la fonction n'est pas définie en $X_0 = 6$

donc on peut:

- Répondre que la question n'a pas de sens, vu que la fonction n'est pas définie en $X_0 = 6$.
- se demander si la fonction est prolongeable par continuité.

il faut établir si la limite pour $X \to 6$ existe.

dans ce cas: $\lim\limits_{x \to 6} \dfrac{x^2 + \sin x}{x - 6} = \lim\limits_{x \to 6} \dfrac{36 + \sin 6}{x - 6} = \nexists$

donc on ne peut pas prolonger f par continuité en $X_0 = 6$

7. $f(x) = \dfrac{x^2 + \sin x}{(x-6)^4}$.

f n'est pas définie au point $x_0 = 6$.. Voir cas ② et cas ⑥

$\lim\limits_{x \to 6} \dfrac{x^2 + \sin x}{(x-6)^4} = \lim\limits_{x \to 6} \dfrac{36 + \sin 6}{(x-6)^4} = +\infty$.

donc la limite existe, mais f n'est pas prolongeable par continuité.

EXERCICE 7

Étudier la dérivabilité des fonctions de l'exo 6.

1. $f(x) = x \sin x$ en $x_0 = 0$

f est dérivable car produit de fonctions dérivables.

2. $f(x) = x \sin(\frac{1}{x})$ en $x_0 = 0$

f n'est pas définie en $x_0 = 0$. On peut toutefois considérer son prolongement par continuité

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

et se demander si la fonction est dérivable.

pour cela on calcule

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h} \frac{h \sin(\frac{1}{h}) - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \sin(\frac{1}{h}) = \nexists$$

donc la fonction f n'est pas dérivable en $x_0 = 0$.

4 $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & x > 1 \\ 1 + x & x \leq 1 \end{cases}$ en $x_0 = 1$

La fonction n'est pas continue en $x_0 = 1$, donc elle ne peut pas être dérivable.

5. $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & x \geq 0 \\ 1 + x & x \leq 1 \end{cases}$ $x_0 = 0$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(1-h)^2 - 1}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^2 - 2h}{h} = 2 \neq 1 = \lim_{h \to 0^-} \frac{(1+h) - 1}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

donc $\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \nexists$, donc f n'est pas dérivable.

6. et 7. f n'est pas définie, ni prolongeable par continuité, donc la question de la dérivabilité n'a pas de sens.