UNIVERSITÉ DE TOULON

Faculté des Sciences et Techniques

Département de Mathématiques

L1 SI (2019-2020)

MS-21 (Math 4) Intégration en plusieurs variables

Cours et travaux dirigés :
Annalisa Panati *email :* annalisa.panati@univ-tln.fr
page web : http ://panati.univ-tln.fr

Ces notes de cours ont la fonction de résumé du cours comme aide à la révision. Elle sont pensées comme complément des explications en classe.

1 Rappels : Intégration en une variable

1.1 Généralités

On commence par réviser la notion d'intégrale. En vue de l'intégration en deux variables il est particulièrement important de comprendre le **changement de variable** dans l'intégrale.

La définition intuitive d'intégrale correspond à celle de l'**aire** comprise entre l'axe des abscisses et la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ au dessous d'un intervalle $[a, b]$. Par aire on veut dire **aire avec signe**.

Ils existent des fonctions pour lesquelles le concept intuitif d'aire n'est pas bien défini. Par exemple pour la **fonction de Dirichlet**

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}, \end{cases}$$

ce ne pas clair quelle quantité doit être regardée comme aire.

Il faut donc une définition précise.
Dans ce cours, on ne rentrera pas dans les subtilités liées à la définition et on regardera que des fonctions pour lesquelles la notion intuitive d'aire est suffisante.

Cependant, pour donner une vision plus complète et pour les étudiants intéressés, on ajoute ici un parenthèse sur la définition.

1.1.1 Parenthèse : quelques mots sur la définition

La définition usuelle donnée dans les cours de première année est celle de l'**intégrale de Riemman**.

Cette définition correspond à approximer l'aire sous la courbe par un multi-rectangle que approche l'aire "par le bas" et un qui l'approche "par le haut" et prendre ensuite leurs "limites". Si les "limites" existent et sont égales, on dit que la fonction est **intégrable** (dans le sens de Riemman).
Voici la construction précise **pour une fonction bornée**. Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$. On divise $[a, b]$ dans n sous-intervalles. Pour cela on choisi $n + 1$ points x_i tels que $x_0 = a$ $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. On appelle P l'ensemble de ce points ($P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$).
Pour le multi-rectangle supérieur, on construit des rectangles qui ont pour

base $[x_i, x_{i+1}]$ et pour hauteur sup $f(x)$ sur cet intervalle et on considère leur union. On notera par $S_P(f)$ l'aire du multi-rectangle ainsi construit.

Pour le multi-rectangle inférieur, on construit des rectangles qui ont pour base $[x_i, x_{i+1}]$ et pour hauteur inf $f(x)$ sur cet intervalle et on considère leur union. On notera son aire par $T_P(f)$.

Définition 1.1 *Soit f une fonction bornée définie sur un intervalle $[a, b]$. On dit que f est* ***intégrable au sens de Riemann*** ssi

$$\sup_{P partition} S_P(f) = \inf_{P partition} T_P(f).$$

Si la fonction est intégrable, alors on note

$$\int_a^b f(x) \; \mathrm{d}x = \sup_{P partition} S_P(f) = \inf_{P partition} T_P(f).$$

Remarque 1.2 *La notation avec le symbole $\int$ rappelle que l'intégrale est une "limite" d'une somme ($\sum$) d'aire de rectangles.*

Remarque 1.3 *La fonction de Dirichlet n'est pas intégrable au sens de Riemann.*

Cette définition ne se généralise pas au deux variables ou bien peut se généraliser avec des difficultés.

Pour cela, une notion différente d'intégrale a été introduite, celle de l'**intégrale de Lesbegue**.

On approche l'aire sous la courbe de façon différente. On prend des fonctions **simples**, c'est à dire, qui prennent un nombre fini de valeurs $s_1, s_2, \ldots, s_n$. On notera une fonction simple par s. Pour ces fonctions, on sait très bien calculer l'aire sous la courbe, elle sera :

$$A(s) = \sum_{i=1}^{n} s_i m(E_{s_i})$$

où $m(E_{s_i})$ est la longueur de l'intervalle (ou des unions d'intervalles) où f prends la valeurs s_i. En réalité, je suis en train de cacher un gros problème : pas tous les ensembles sont des intervalles et on ne peut pas tout le temps leur associer une longueur. Ce problème est traité par la **théorie de la mesure de Lesbegue**, qui dépasse largement le niveau de ces cours. Cependant, si on glisse sur ce problème, la définition d'intégrale de Lesbegue est très claire : on approche l'aire par de fonction simples qui sont majorées par f.

Définition 1.4 *Soit f une fonction bornée définie sur un intervalle $[a,b]$. On dit que f est **intégrable au sens de Lebesgue** ssi*

$$\sup_{s \text{ simple, } s \leq f} A(s).$$

Si la fonction est intégrable, alors on note toujours

$$\int_{[} a,b] f(x)\,\mathrm{d}x = \sup_{s \text{ simple, } s \leq f} A(s).$$

Remarque 1.5 *La fonction de Dirichlet est intégrable au sens Lesbegue, car $m(\mathbb{Q}) = 0$ (les étudiants plus motivés pourrons demander d'avantage d'explications sur ce point en classe).*

1.1.2 Critère d'integrabilité

Comment savoir si une fonction est intégrable (au sens de Riemann) ? Le mathématicien Henri Lesbegue a repondu de façon très complète à cette question avec la propostion suivante.

Proposition 1.6 (Critère de Lebesgue) *Une fonction bornée sur $[a,b]$ est Riemann-intégrable si et seulement si la mesure de Lebesgue de l'ensemble de ses discontinuités est nulle.*

Mais qui est donce cette mesure de Lesbegue ? Encore une fois une tractation rigureuse et générale de ce sujet depasse le niveau de ce cours.
Par contre, nous pouvons facilement décrire la mesure de Lesbegue des sous-ensemble 'simples' de $\mathbb{R}$, comme les intervalles et les unions finies de points. Dans ces cas, la mesure de Lesbegue coincide avec la notion de longuer. Plus precisement

- si $E = [a,b]$, alors la mesure de Lesbegue $m(E) = |b-a|$,
- si E est l'union de n intérvalles disjointes $[a_i, b_i]$, alors $m(E) = \sum_{i=1}^{n} |b_i - a_i|$,
- si $E = \{a\}$ (un point) alors $m(E) = 0$,

— si $E = \{a_1\} \cup \ldots \{a_n\}$ (union finie de points), alors $m(E) = 0$.

Donc, on a comme corollaire la proposition suivante (qui est suffisante pour le propos de ces cours).

Proposition 1.7 (Corollaire du Critère de Lebesgue) *Une fonction bornée sur $[a, b]$ avec un nombre fini de discontinuités est Riemann-intégrable.*

1.1.3 Propriétés des intégrales

Avec l'interprétation de l'intégral comme aire sous-jacente à une courbe, les deux propriétés suivantes sont intuitives (les étudiants plus motivés pourront chercher à les prouver à partir de la définition, comme exercice).

$$\int_a^b f(x) + g(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$$

$$\int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\ \mathrm{d}x$$

1.1.4 Calcul d'intégrales : théorème fondamental de l'analyse

Si on devait appliquer la définition pour calculer les intégrales, on s'en sortirait jamais.

Heureusement, un utlil très puissant a été développé par les mathematiciens : le **théorème fondamental de l'analyse** ou **théorème fondamental du calcul différentiel**. La première forme de ce théorème fut publié par James Gregory en 1668 et une forme plus générale par Isaac Barrow, et ensuite la théorie a été développée par Isaac Newton et parallèlement par Gottfried Leibniz.

Theorem 1.8 *Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$. Soit F une fonction telle que $F' = f$.*
Alors

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

La fonction F s'appelle **primitive** et elle est définie à moin d'une constante. Son nom en anglais est plus parlant : on l'appelle **anti-dérivée**. Ce nom est

bien choisi, car, effectivement, on est en train d'inverser l'opération de dérivation.
Notation : F est noté aussi $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Pour calculer l'intégrale, il suffit donc de savoir trouver une primitive. D'autres exemples et exercices seront donnés aux TD.

Est-ce que la primitive existe toujours ? La fonction

$$F(x) = \int_a^x f(s)\,\mathrm{d}s$$

si elle est définie, elle est bien une primitive de f. Elle est définie si f est intégrable. Je rappelle le corollaire du critère de Lesbegue qui nous dit que :

Proposition 1.9 (Corollaire du Critère de Lebesgue) *Une fonction bornée sur $[a, b]$ avec un nombre fini de discontinuités est Riemann-intégrable.*

Donc une primitive existe pour une classe très large de fonction, par exemple pour toutes les fonctions continues.

Par contre, en générale *on n' arrive pas forçement à trouver une expression explicite*. On arrive dans de cas particulier, comme ces que on verra aux TD. Connaître la forme explicite de la primitive est in très grand avantage pous le calcul d'aire, donc les matematiciens ont cherché à en calculer les plus possible.
Si on ne connaît pas explicitement la primitive , on est obligé de passer par un étude qualitif ou par des approximations (théoriques ou numériques).

En vue du traitement des fonctions en deux variables, on a besoin de bien comprendre le changement de variable dans les intégrales. On regardera aussi l'intégration par parties.

1.1.5 Intégration par changement de variable

On veut comprendre comment l'expression d'un intégrale change sous un changement de variable.

Considérons d'abord une fonction constante égale à c sur un intervalle $[a, b]$ et 0 ailleurs.

Cela va sans dire que

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b c\ \ \mathrm{d}x = c\ |b-a|$$

Si on fait un changement de variable du type $s = x + 1$ (où 1 est une constante choisie au hasard), on voit toute de suite que $x \in [a, b]$ *ssi* $s \in [a + 1, b + 1]$. Bien évidement

$$c|b-a| = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{a+1}^{b+1} f(s)\ \mathrm{d}s = c \cdot |b-a|.$$

Supposons maintenant de faire un changement de variable du type $s = \frac{x}{7} + 1$ (7 est aussi une constante choisie au hasard).

Clairement $x \in [a, b]$ *ssi* $s \in [a/7 + 1, b/7 + 1]$.
On voit toute de suite que

$$c|a-b| = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \neq \int_{a/7+1}^{b/7+1} f(s)\ \mathrm{d}s \int_{a/7}^{b/7} f(s)\ \mathrm{d}s = c \cdot |a/7 - b/7|.$$

Pour avoir égalité, il faut multiplier le terme de droite par 7.

Si on change la constante $1/7$ par une autre constante $\frac{1}{\gamma}$, c'est à dire $s = \frac{1}{\gamma}x + 1$, on devra multiplier le résultat par γ. On peut se rappeler facilement de ce facteur de correction en écrivant $\mathrm{d}s = \frac{1}{\gamma}\ \ \mathrm{d}x$.
De cette façon, on a

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{a/\gamma+1}^{b/\gamma+1} f(s)\gamma\ \ \mathrm{d}s.$$

Bien sûr, on peut choisir remplacer 1 par une autre constante η. On aura alors que si $s = \frac{1}{\gamma}x + \eta$,

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{\frac{a}{\gamma}x+\eta}^{\frac{b}{\gamma}x+\eta} f(s)\ \gamma\ \ \mathrm{d}s.$$

Et si $s = g(x)$ pour g une fonction générale ?
Comme on a vu en détail dans le cours de MP21(Math 3), si g est dérivable, près d'un point s_0 la fonction est bien approximée par sa droite tangente, c'est à dire $g(s_0 + h) = g(s_0) + g'(s_0)h + g\epsilon(h)$. Donc, pour h petit, $g(s_0 +$

$h) - g(s) \circ g'(s_0)h$.
En d'autres termes, près de s_0, le facteur correctif est $g'(s_0)$. Si on utilise la notation $\mathrm{d}x = g'(s)\,\mathrm{d}s$, on obtient

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(s)g'(s)\ \mathrm{d}s.$$

Donc quand on fait un changement de variable, on doit introduire un facteur correctif dans l'intégrale (en plus de changer les extrêmes d'intégration). Ce facteur correctif correspond à $g'(s)$.

Du point de vue du calcul, on voit bien que si F est une primitive de f, c'est à dire $F' = f$, alors $(F(g(s))' = f(g(s))g'(s)$. Donc, si $x = g(s)$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x))]_a^b = F(b) - F(a) = F(g(g^{-1}(b)) - F(g(g^{-1}(a))\\ = [F(g(x))]_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(s))g'(s)\ \mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Exemple : En posant $s = \frac{1}{x}$

$$\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int e^s\,\mathrm{d}s = e^s = e^{\frac{1}{x}}.$$

D'autres exemples de calcul seront données aux TD.

1.1.6 Intégration par parties

L'intégration par partie est une formule qui suive de la formule de la dérivée d'un fonction produit de deux fonctions dérivables f,g.

Si $h = f \cdot g$, alors

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Donc

$$(f \cdot g)(x) = \int (f \cdot g)'(x) = \int f'(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x + \int f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x,$$

e donc, on obtient la **formule d'intégration par parties**

$$\int f'(x) \cdot g(x) \, \mathrm{d}x = f(s)g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) \, \mathrm{d}x.$$

Cette formule peut-être utile pour réduire un intégrale à une autre forme, dans laquelle on arrive à deviner une primitive.

Exemple :

$$\int xe^x \, \mathrm{d}x = xe^x - \int 1 \cdot e^x \, \mathrm{d}x = xe^x - e^x.$$

D'autres exemples de calcul, seront données aux TD.

2 Integration en deux variables

Dans le cas d'une variable on cherche à calculer l'aire comprise entre la courbe qui est un graphe d'une fonction et l'axe des x sur un interval $[a, b]$. On notait cette aire

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x.$$

On cherche maintenant à calculer une le volume compris entre une surface qui est le graphe $\mathcal{G}_f$ d'une fonction et le plan xy sur une region $A \subset \mathbb{R}$.

On denote ce volume par

$$\iint_A f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

On a déjà discuté la définition précise d'intégral pour une variable.

Pour ce qui concerne ce chapitre, on dira seulement que la définition de Lebesgue se généralise sans changement. Dans ce cours on verra seulement de cas où la définition intuitve de volume est suffisante, et on apprendra à le calculer.

L'idée de base est celle de reduir un l'intégral d'une fonction de deux variables à deux intégrals d'une variable. Avant d'écrire le théoreme général (théoreme de Fubini) faisons quelques exemples où on peut comprendre la procedure de façon intutitive.

Soit $A = [0,1] \times [0,2]$. Alors $f(x,y) = x^2 + y$

$$\iint_A f(x) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \iint_A x^2 + y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \iint_A x^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y + \iint_A y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x \int_0^2 \,\mathrm{d}y + \int_0^1 \,\mathrm{d}x \int_0^2 y \,\mathrm{d}y = [\frac{x^3}{3}]_0^1 \cdot 2 + 1 \cdot [\frac{y^2}{2}]_0^2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Soit $A = [0,1] \times [0,2]$. Alors $f(x,y) = x^2 y$

$$\iint_A f(x) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_A x^2 + y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_A x^2 y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

Dans ce cas on ne peut plus "separer" x et y, mais on peut intégrer une variable à la fois en regardant l'aure comme une constante.

$$\iint_A f(x) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_0^2 \int_0^1 x^2 y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y + = \int_0^2 \left[\frac{x^3 y}{3}\right]_0^1 \,\mathrm{d}y = \int_0^2 \frac{y}{3} \,\mathrm{d}y = \left[\frac{y^2}{6}\right]_0^2 = \frac{2}{3}$$

Soit $f(x,y) = 7$ et A l'ensemble borné delimité par le courbes $(t, t^2)(y = x^2)$ et (t^2, t) $(x = y^2)$. Noter que le deux courbes s'intersectent en $(0,0)$ et $(1,1)$. Alors

$$\iint_A f(x) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} 7 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_0^1 [7y]_{x^2}^{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x =$$

$$7 \int_0^1 \sqrt{x} - x^2 \,\mathrm{d}x = 7 \left[\frac{2x^{3/2}}{3} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{7}{3}$$

On aura aussi pu inverser l'ordre d'integration, ce qui correnspond à inverser le rôle de x et y.

On est prêt maintenat pour approcher un cadre un peu plus cas general.

Theorem 2.1 (Intégration sur un domain simple) *Soit A un ensemble qui peut s'écrire comme $A = \{(x,y) | x \in [a,b], y \in [\alpha(x), \beta(x)]\} = \{(x,y) |\ x \in [\gamma(y), \delta(y)],\ y \in [c,d]\}$, avec δ, γ* continues. *Supponsons que $f(x)$ est continue et*

$$\iint_A f(x) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

existe et est fini.

Alors

$$\iint_A f(x) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_a^b \int_{\alpha(x)}^{\gamma(x)} f(x,y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_c^d \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y.$$

Une idée intuitive de la preuve a été expliquée en classe.

Remarque 2.2 *Quelques fois, en échangeant l'ordre d'intégration, l'intégral double peut dévenir plus facile à evaluer.*

Note : ce théorème peut être étendu dans un cadre plus général (théorème de Fubini et Tonelli).

2.1 Changement des variables dans un intégral

Dans le cas d'une variable, si on fait un changement de variables, il faut mettre un facteur correctif dans l'intégral qui compense le changement de longuer de l'intervalle.
De la même façon ici, il faut introduire un facteur correctif qui compense le changement d'aires. Régardons d'abord un cas simple.

Soit $f(x, y) = 3$.
Soit $A = [0, 1] \times [0, 1]$. Clairement

$$\iint_A f(x, y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = 3 \cdot (1 \cdot 1) = 3$$

Supposons de faire le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} u = 3x \\ v = 2y \end{cases}$$

Pour nous faciliter la vie après, on va utiser la notation suivante.
On définit

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{\Phi} : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & \mathbf{\Phi}(x, y) = (3x, 2y) \end{array}$$

et

$$(u, v) = \mathbf{\Phi}(x, y)$$

Alors $(x, y) \in A = [0, 1] \times [0, 1]$ si et seulement si $(u, v) \in B = [0, 3] \times [0, 2]$. En d'autre termes $\mathbf{\Phi}(A) = B = [0, 3] \times [0, 2]$.

On voit bien que

$$3 = 3 \cdot 1 = \int_A f(x, y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \neq \int_B f(u, v)\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v = 3 \cdot (3 \cdot 2) = 3 \cdot 6$$

Il faut introduire un facteur correctif, c'est à dire que **il faut diviser par** $aire(B) = aire(\mathbf{\Phi}([0,1] \times [0,1]))$.

Dans ce cas on sait très bien calculer $aire(B) = aire(\mathbf{\Phi}([0,1] \times [0,1]) = 3 \cdot 6$.
Donc

$$3 = 3 \cdot 1 = \int_A f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int_B f(u,v)\frac{1}{6}\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot (3 \cdot 2) = 3$$

Pour de raison de notation, je vais aussi écrire la même chose avec le facteur de correction "dans la partie en x".

$$3 \cdot 6 = 3 \cdot 6 = \int_A f(x,y)6\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int_B f(u,v)\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v = 3 \cdot (3 \cdot 2) = 3 \cdot 6 = 18$$

Attention : si on change A, le rapport entre A et $\Phi(A)$ est toujours 6, donc le facteur correctif est toujours 6.

Réagardons maintenant un cas légerment plus compliqué.
Supponons d'avoir un changement de variables du type :

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{\Phi} : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (u,v) = \mathbf{\Phi}(x,y) = (ax+by, cx+dy) \end{array}$$

On peut écrire la même chose *sous forme matricielle* c'est à dire

$$\mathbf{\Phi}(x,y) = (ax+by, cx+dy) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

où le produit est dans le sens de produit de matrices.
Si $c = b = 0$, c'est claire que $aire(\mathbf{\Phi}([0,1] \times 0,1])) = aire([0,a] \times [0,d]) = a \cdot d$.

Et dans le cas général ? Dans le cas général, $aire(\mathbf{\Phi}([0,1] \times 0,1]))$ est donnée par le parallelogramme de sommets $(0,0), (a,c), (b.d)(a+d, b+c)$. On peut montrer que son aire est donnée par **le détérminant** de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ défini comme cela :

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Pourquoi ? Vous pouvez la calculer avec les intruments de géométrie éuclidienne, mais le calcul peu être un peut long.. l'explication plus simple est contenue dans le dessin que vous trouvez dans ce lien :

http://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=./d/determinant.html

Les détérminant peut être défini aussi pour les matrices d'ordre supérier, mais on verra cela dans le prochain chapitre.

Donc dans notre intégral, si on appelle $J := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on aura :

$$3 = 3 \cdot 1 = \int_A f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int_B f(u,v)\frac{1}{detJ}\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v = 3 \cdot \frac{1}{detJ} \cdot (\det J) = 3$$

Ou si on insère le facteur correctif dans l'intégral en x, y, on a

$$3 \cdot detJ = \int_A f(x,y) detJ\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int_B f(u,v)\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v = 3 \cdot (\det J).$$

Dans le cas général, ce facteur sera *détérminat du Jacobien*. On commence donc à introduire les objet dont on a besoin pour le définir.

Soit $\mathbf{\Phi} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une fonction **bijective** et **différéntiable** donnée par

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{\Phi} : & \mathbb{R}^2 \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (u,v) = (\varphi(x,y), \psi(x,y)) \end{array}$$

On appelle matrice jacobien de $\mathbf{\Phi}$ la matrice $J_{\mathbf{\Phi}}(x,y)$ la matrice donné par

$$J_{\mathbf{\Phi}}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial \psi}{\partial y}(x,y) & \frac{\partial \psi}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

Cette matrice joue le même rôle que joue ∇f pour une fonction de deux variables à valeur dans $\mathbb{R}$: en prémier ordre d'approximation $\mathbf{\Phi}(x,y)$ peut-être bien approximé comme

$$(u,v) = J_{\mathbf{\Phi}}(x,y) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(où le produit est un produit entre matrices).
Donc près d'un point (x_0, y_0) le facteur correctif à ajouter est l'inverse du determinant de la matrice jacobienne c'est à dire

$$j(x_0, y_0) = \frac{1}{det J_{\mathbf{\Phi}}(x_0, y_0)}$$

Ces observations nous amenent à comprendre, au moins de façon intuitive, la formule du changement de variables suivante.

Proposition 2.3 *Soit* $\mathbf{\Phi} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *une fonction* ***bijective*** *et* ***différéntiable*** *donnée par*

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{\Phi} : & \mathbb{R}^2 \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (u, v) = (\varphi(x, y), \psi(x, y)) \end{array}$$

Alors

$$\iint_A f(x, y) det J_{\mathbf{\Phi}}(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \iint_{\mathbf{\Phi}(A)} f(x(u, v), y(u, v)) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$$

où $J_{\mathbf{\Phi}}(x, y)$ *est la matrice Jacobienne de*

Remarque : $J_{\mathbf{\Phi}}(x, y)$ *est une matrice qui dépend de* (x, y) *donc on doit forçement introduire le facteur* $det J_{\mathbf{\Phi}}(x, y)$ *dans l'intégral qui dépend de* (x, y) *à gauche.*
Mais très souvent dans les application, on a (x, y) *en fonction de nouvelle variable* (u, v) *donc le rôles de* (x, y) *et* (u, v) *sont inversés. Par souci de claireté, on va écrire explicitement la formule dans ce cas aussi.*
Soit le changement de variables donné par la fonction ***bijective*** *et* ***différéntiable*** *donnée par*

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{\Phi} : & \mathbb{R}^2 \to & \mathbb{R}^2 \\ (u, v) & \mapsto & (x, y) = \sigma(u, v), \tau(u, v)) \end{array}$$

$J_{\mathbf{\Psi}}(x, y)$ *la matrice donnée par*

$$J_{\mathbf{\Phi}}(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial \tau}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \tau}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix}$$

— alors

$$\iint_{\mathbf{\Psi^{-1}(A)}} f(x(u,v), y(u,v)) \det J_{\mathbf{\Psi}}(u,v)\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v = \iint_A f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

2.1.1 Cordonnées polaires

Un changement de variables important est celui de cordonnées polaires (qu'on a déjà vu). Calculons le jacobien.

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta. \end{cases}$$

$$J_\phi(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho}(\rho,\theta) & \frac{\partial x}{\partial \theta}(\rho,\theta) \\ \frac{\partial y}{\partial \rho}(\rho,\theta) & \frac{\partial y}{\partial \theta}(\rho,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta. \end{pmatrix}$$

Donc $j(\rho,\theta) = \det J(\rho,\theta) = \rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta = \rho$.

Exemple d'application :

Soit $A = \{(x,y)|x^2+y^2 \leq R\}$ (boule de rayon R).

$$\iint_A 1\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} 1\ \mathrm{d}\theta\right)\rho\ \mathrm{d}\rho = 2\pi\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^R = \pi R^2$$

3 Intégration en plus de deux variables

Cette section est en cours de rédaction.

On s'intéresse maintenant à des fonction de plus de deux variables, c'est à dire

$$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \quad d > 0$$

Maintenant le graphe de f est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^{d+1} > 3$, qu'on appelle parfois une *hypersurface* qui est plus difficile à visualiser. L'intégrale correspond aussi à un *hypervolume*.

Mise à part cette difficulté de visualisation, du point de vue calculatoire, tout marche pareil. On résume donc les éléments principales :

-la définition précise est le point qui pose le problème plus important, mais cela est résolu par la **théorie de la mesure de Lesbegue**. Cette théorie depasse le niveau de ce cours, mais on a donné des éléments intutitif. L'idée intutive nous suffira pour ce cours.

-lors que le domaine d'intégration est **simple** dans le sens du théorème de Fubini, un intégral en n variables se calcule en iterant n fois un intégral en 1 variables.

-la formule du changement de variables reste la même, avec l'unique différence que la matrice $J_{\mathbf{\Phi}}$ est une matrice $n \times n$. On doit donc définir et apprendre à calculer le détérminant d'un matrice $n \times n$.
Pour $d = 3$ on va introduire explicitement les changements de variables **les cordonnées sphériques** et les **cordonnées cylindriques**.