2 Calcul différentiel en deux (et plusieurs) variables

Dans cette partie du cours, on étudiera les fonctions de deux variables. La généralisation de une variables à deux variables de la déscription des fonctions demande l'introduction des nouveaux concepts et un effort d'imagination de la part de l'étudiant.
D'autre part, la généralisation de deux à plusièures variables est plus facile, et sera seulement mentionnée ou laissée en exercice.

2.1 Fonctions de plusieurs variables

On considère des quantités qui dépendent de deux variables.

L'ensemble de valeurs possibles pour les variables est un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^2 = \{(x, y)| \ x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$. L'ensemble E s'appelle le *domain de définition.*

Comme pour le le cas d'une variable, l'ensemble de définition peut être l'ensemble de données auquelles on a eu accès, dans ce cas E détérminé par des contraintes experimentales.
Par examples, si x est la temperature, elle ne pourra pas être négative, et on pourrait avoir mesuré seulement les valeurs correspondantes à des temperatures dans une certaine intérvalle.
Dans un contexte mathématique non liée aux expériences, l'ensemble de définition est une donnée, tout comme l'équation qui définit la fonction s'il en a une.
Si on nous donne seulement une formule algebrique pour la valeur de f in x, on choisi habituellement comme domain de définition l'ensemble le plus grand sur lequel cette formule a du sens.

Définition 2.1 *Soit E un sous-ensemble de R. Une fonction de deux variables à valeurs dans $\mathbb{R}$ est une association qui fait correspondre à un élément $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ un et une seul élement $f(x, y)$.*

A toute fonction on associe un graphe répresenatatif $\mathcal{G}_f$.

Définition 2.2 *Soit* $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *une fonction. On appele* graphe de la fonction f *le sous-ensemble des points de* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *qui satisfont la relation* $f(x, y) = z$. *En d'autre termes,*

$$\mathcal{G}_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x, y) \in E \text{ et } f(x, y) = z\}$$

Le graphe d'une fonction de deux variables peut être visualisé comme une surface dans l'espace. Cela demande un effort d'immagination pour l'étudiant qui approche ce sujet pour la prémier fois. Le comportement d'un surface dans l'espace peut être bien plus complexe que celui d'une ligne dans le plan ! Dans la suite on introduit des outils que peuvent aider à visualiser et répresenter graphiquément ces surfaces, et que vont nous venir en aide pour comprendre correctement la théorie de la différentiation.

Remarque 2.3 *Pour les fonctions dépendentes de trois variable (ou plus), le graphe est un sous-ensemble de* $\mathbb{R}^4$ *(ou* $\mathbb{R}^n$ *avec* $n > 4$*). Dans ce cas, on ne peut plus rapprocher cet objet mathématique à des objects qu'on rencontre dans la vie quotienne. Les outils qu'on introduira dans la prochaine section vont nous venir en aide pour développer notre "immagination mathématique" dans ce sens.*

Commençon par visualiser quelques surfaces simples (voir vidéo) :

Exercice 2.2

1. $z = C$, $C \in \mathbb{R}$ *(plan horizontal),*
2. $z = ax + by$, $a, b, \in \mathbb{R}$ *(plan non vertical),*
3. $z = x^2 + y + 2$,
4. $z = -x^2 - y^2$,
5. $z = -x^2 + y^2$,
6. $z = y^3$.

2.3 Lignes de niveau, fonctions partielles, courbes parametrées dans le plan

Representation par lignes de niveau Une façon de visualiser le graphe d'une fonction est celle de "couper avec de plans".

On peut couper avec de plans horizontales $z = costante = c$.

La courbe qu'on obtient sur le plan horizontal $z = c$ est appellée *ligne de niveau c*

Définition 2.4 *On appelle* ligne de niveau c *l'ensemble*

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | f(x, y) = c\}$$

Pour visualiser la fonction, on trace sur un même plan, les lignes de niveau correspondantes à des valeur C_i qui different pour une constante ($C_{i+1} - C_i = I$, I fixe). On a l'habitude de voir des lignes de niveau :

-dans cartes IGN pour visualiser le graphe de la fonction qui associe au point (x, y) de la surface de la terre au niveau de la mer la fonction $f(x, y)$ l'altitude de la montagne. On visualise littéralement la surface de la montagne.
-dans le prévisions méteo : isobares de pressions atmosphérique sont les lignes de niveau de la fonction qui associe au point (x, y) de la surface de la terre au niveau de la mer la fonction $f(x, y)$ la pression atmosphérique. Dans ce cas, on a pas une "vraie" surface qui correspond à cette fonction, c'est une surface immaginaire.

- dans les films d'action : si on porte de lunette infrarouge on voit une image qui associe à un point du plan (x, y) (ou de l'espace (x, y, z) une couleur qui correspond à la temperature de façon countinue. Si à la place d'une répresentation continue, on assigne des couleur différentes à des intervalles de temperature, les lignes de niveau sont celles qui separent une couleur de l'autre.

Exercice 2.4 *Écrire les équations et tracer les lignes de niveau des fonctions de l'exercice 2.2.*

l'altitude

Exercice 2.5 *Supposons d'avoir un maximum ou un minimum local. Comment sont les lignes de niveau autour de ce point ?*

Fonctions partielles

Une autre possibilité pour représenter la surface est celle de couper la surface avec des plans verticals. On obtient dans ce cas des *fonction partiells.*

Commençons par les fonctions partielles qu'on obtient en coupant avec le plan $y = C$. L'intersection de la surface $z = f(x, y)$ et du plan $y = C$ est une courbe dans le plan xz. Cette courbe est la même que le graphe de la fonction d'une variable

$$\begin{array}{rccl} f_C : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & x & \mapsto & f_C(x) = f(x, C). \end{array}$$

De la même façon, en coupant avec un plan $x = C$, l'intersection de la surface $z = f(x, y)$ et du plan $x = C$ est une courbe dans le plan yz. Cette courbe est la même que le graphe de la fonction d'une variable

$$\begin{array}{rccl} f_C : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & x & \mapsto & f_C(x) = f(C, y). \end{array}$$

Les fonctions d'une variables $f(C, y)$ et $f(x, C)$ sont appelés *fonctions partielles*. Les graphes des fonctions partielles peuvent nous aider à visualiser les surfaces $z = f(x, y)$.

Exercice 2.6 *Écrire les équations et tracer les fonctions partielles des fonctions de l'exercice 2.2.*

Courbes parametrées dans le plan

Les courbes parametrées dans le plan peuvent nous aider pour étudier le fonction de deux variables (et étudier les limites).
Un courbe parametré associe à un element $t \in \mathbb{R}$ (parametre) un point du plan $(x(t), y(t))$. On pourrait immaginer d'être en train de marcher sur le plan et d'associer au temps t le point du plan ou on se trouve. Voici une définition plus précise.

Définition 2.5 *Une courbe parametrée dans le plan est une fonction $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ ou I est un intervalle dans $\mathbb{R}$ (y compris $I = \mathbb{R}$).*

Bien sûr, on peut parcourrir le même chemin à différentes vitesses. Cela correspond au fait que differentes fonction γ_1, γ_2 peuvent individuer les mêmes points dans le plan, c'est à dire $\gamma_1(I) = \gamma_2(I)$.
Si on se place dans le plan xy on pourra décrire l'axe x comme la courbe parametrée

$$\begin{array}{rccl} \gamma_x : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & (t, 0). \end{array}$$

et l'axe y comme la courbe parametrée

$$\begin{array}{rccl} \gamma_y : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & (0, t). \end{array}$$

La fonction partielle peuvent alors être vues comme la composition de $\gamma_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ (respectivement $\gamma_y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$) et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
En d'autre termes, les fonctions partielles correspondent à parcourrir la surface $\mathcal{G}_f$ *le long de l'axe* x (resp. de l'axe y).

En génerale, on peut immaginer la compostion entre la courbe γ et f comme "parcourrir la surface $\mathcal{G}_f$ *le long de la courbe* γ".

Exercice 2.7 *Dessiner les courbes paramétrées suivantes :*

$$\begin{array}{rcclll} \gamma_{a,b} : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 & & \\ & t & \mapsto & (at, bt) & a, b \in \mathbb{R}, & \textit{(droites)} \\ \nu_a : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 & & \\ & t & \mapsto & (t, at^2) & a \in \mathbb{R}, & \textit{(paraboles)} \\ \mu_a : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 & & \\ & t & \mapsto & (at^2, t) & a \in \mathbb{R}, & \textit{(paraboles)} \\ \sigma_a : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 & & \\ & t & \mapsto & (t, t^3) & a \in \mathbb{R}, & \textit{(cubique)} \end{array}$$

2.8 Limite

Dans la section 1.1.1, on a montré que la limite depend seulement de la notion de *distance*. Pour définir la limite en deux variables, on a juste à rémplacer la distance dans $\mathbb{R}$ par la distance en $\mathbb{R}^2$.
Ici $d_{\mathbb{R}^2}((x, y), (x_0, y_0)) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

Notation :
on note aussi $||(x-x_0, y-y_0)|| := d_{\mathbb{R}^2}((x, y), (x_0, y_0)) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$

Définition 2.6 *On dit que* ℓ *est la limite de* f *pour* (x, y) *qui tend vers* (x_0, y_0) si et seulement si *pour tout* $\epsilon > 0$ *il existe* $\delta_\epsilon > 0$ *tel que si* $d_{\mathbb{R}^2}((x, y), (x_0, y_0)) <$

δ_ϵ *alors* $d_{\mathbb{R}}(f(x,y),\ell) < \epsilon$.
On note alors

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell.$$

La défintion de continué reste idéntique.

Définition 2.7 *Soit* $f : E \to \mathbb{R}^2$ *est continue en* $(x_0, y_0) \in E$ ssi

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0).$$

Comme pour la limite d'une variable, une fois que une définition cohérente de limite a été donnée, il n'est pas nécessaire de passer par la définition pour calculer des limites de fonction ou pour montrer leur existence.

Pour montrer que une limite existe, il suffit de prouver que
si $d_{\mathbb{R}^2}((x,y),(x_0,y_0)) < \delta$, alors

$$|d(f(x),\ell)| < \epsilon(\delta)$$

avec $\epsilon(\delta) \to 0$ quand $\delta \to 0$.

Si la défintion est inchangée, comprendre sa signification et calculer correctement un limite dévient plus complexe.

Considérons quelques exemples. Supposons de vouloir calculer la limite d'un fonction $f(x,y)$ en $(x_0,y_0) = (0,0)$.

Considérons la fonction

$$f(x,y) = \frac{x^2 + y^4}{(x^2 + y^2)}$$

définie sur $\mathbb{R}^2/0$.

On voit immediatement que $f_0(y) = f(0,y) = y^2 \to 0$ mais $f_0(x) = f(x,0) = 1 \to 0$. Qui est donc la limite ? 1 ou 0 ? Si on réflechit, on comprend que cela prouve que cette fonction **n'admet pas de limite en (0,0)**.
Si on s'approche de $(0,0)$, le long de la droite $(x,0)$ la valeur de la fonction s'approche de 0, mais le long de la droite $(0,y)$, la valeur de la fonction s'approche de 1. Donc globalement on fixer une distance δ de $(0,0)$ aussi petite que l'on veut, on trouvera toujours des de point (x,y) à une distance de $(0,0)$ inférieure à δ tels que $f(x,y)$ est proche de 1 et des points tels que

$f(x,y)$ est proche de 0. Globalement la limite n'existe pas !

Quelque étudiant ou étudiante pourrait avoir l'impréssion qu'il suffit de calculer $lim_{x\to 0}f(x,y) = f(0,y)$ et puis $lim_{y\to 0}f(0,y)$ ou bien $lim_{y\to 0}f(x,y) = f(x,0)$ et puis $lim_{x\to 0}f(x,0)$ et si elle existent est sont égales entre elles alors la limite globale existe. **Cette procédure n'est pas correcte,** cela ne suffit pas pour calculer la limite ou montrer qu'elle existe.

L'étudiant ou l'étudiante pourrait alors penser qu'il suffit de calculer la limite le long de toutes les droites qui passent par 0.
Cela n'est pas correct non plus !

Considerons la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Si on se restraint à une droite (at, bt) on a

$$f(at,bt) = \frac{a^2t^2bt}{a^4t^4+b^2t^2} = \frac{t^3(a^2b^2)}{t^2(a^4t^2+b^2)} = \frac{t(a^4b^2)}{(a^4t^2+b^2)} \to 0$$

pour tout a, b. Toutefois, si on approche 0 le long d'une courbe qui n'est pas un droite, par exemple, (t, t^2), on a

$$f(t,t^2) = \frac{t^3}{t^4+t^4} = \frac{t^3}{t^4(1+1)} = \nexists.$$

Cette limite donc n'existe pas ! et donc la limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)}$

Pour prover qu'une limite existe, il faut **trouver une majoration de** $d(f(x,y),\ell)$ en termes de $d_{\mathbb{R}^2}((x,y),(x_0,y_0)) = ||(x-x_0, y-y_0)||$.
Considerons

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

On voit que $\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0$ et $\lim_{y\to 0} f(0,y) = 0$. Si la limite existe, elle doit donc être 0.
On rappelle que

$$|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

(à prouver comme exercice).
Pour prouver que la limite existe, on écrit

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0\right| \leq \left|\frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \left|\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2})\right| \to 0$$

uniformement en θ as $d_{\mathbb{R}^2}((x,y),(0,0)) = \sqrt{x^2+y^2} \to 0$.

2.9 Cordonnées polaires

Dans la section précendente, on a du majorer la fonction par un fonction de la distance de l'origine. Dans ce gendre de situation, il est souvent utile d'exprimer la fonction en termes de de la distance de l'origine.
On peut introduire un nouveu système de cordonnés dans le plan, appellées *cordonnes polaires.*

On indentifie un point du plan (x, y) par deux cordonnées (ρ, θ), ρ est la distance de l'origine, θ est l'angle entre l'axe des x et la droite qui passe par (x, y) et l'origine.
Donc on a

$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \\ y = \rho\cos\theta \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arctan\frac{x}{y}. \end{cases}$$

Par rapport à la limite, c'est utile d'écrire le fonction en cordonné polaires.
Si on écrit

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2\sin\theta\cos\theta}{\rho} = \lim_{\rho\to 0}\rho\sin\theta\cos\theta$$

on voit très bien que Si on écrit

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0\right| = \lim_{\rho\to 0}\left|\frac{\rho^2\sin\theta\cos\theta}{\rho}\right| = \lim_{\rho\to 0}|\rho\sin\theta\cos\theta| \leq \rho \to 0$$

2.10 Différentiation

Un instrument important que nous avons a dispostion pour l'étude des fonction d'une variales est la dérivée.
Peut-on généraliser la notion de dérivée ? Si on prend l'approche de l'approximation linéaire, on pourrai definir une notion de fonction dont le graphe $\mathcal{G}_f$ au point (x_0, y_0) est bien approché par un plan (le plan tangente). Comme pour la derivée, on ne considère pas de plans vertical.
Le graphe $\mathcal{G}_f$ est décrit par l'equation $z = f(x, y)$. Un plan non vertical qui passe par le point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ est décrit par l'équation $z = f(x_0, y_0) + Ah_x + Bh_y$ avec $h_x = x - x_0$, $h_y = y - y_0$.

Définition 2.8 *On dit que f est différentiable au point* (x_0, y_0) si et seulement si *s'il existe A, B tels que la limite*

$$\lim_{(h_x,h_y)\to(0,0)} \frac{f(x_0 + h_x, y_0 + h_y) - f(x_0, y_0) - Ah_x - Bh_y}{||(h_x, h_y)||} = 0$$

Cette définition traduit l'idée que "$\mathcal{G}_f$" est bien approché par un plan
Comme pour le fonctions d'une variable, on pouvait récrir la condition de dérivabilité comme

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + Ah_x + Bh_y + ||(h_x, h_y)||\epsilon(||(h_x, h_y)||).$$

Si on l'écrit dans cette forme, bien évidement on obtient, comme pour les fonctions d'une variable, que

Proposition 2.9 *Si f est différentiable en (x_0, y_0) alors f est continue en (x_0, y_0).*

2.10.1 Dérivées partielles

Si f est différentiable, alors on est capable de calculer A et B qui intérviennent dans la définition, et par consequént le plan tangent.

Définition 2.10 *On appéle* dérivées partielles de f au point (x_0, y_0), *notées par* $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$
les dérivées des fonctions partielles $f_{y_0}(x)$ en y_0 et $f_{x_0}(y)$ en y_0. Autrement dit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f'_{y_0}(x_0) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f'_{x_0}(y_0).$$

Remarque 2.11 *Visualisons $\mathcal{G}_f$ comme la surface d'une montagne. La fonction partielle $x \mapsto f_{y_0}(x)$ représente notre hauteur si on se déplace sur un chemin qui correspond à la droite $x \mapsto (x, y_0)$ au niveau de la mer. Donc $f'_{y_0}(x)$ nous dit la pente de notre chemin, en particulier si nous sommes en train de monter ou de descendre .*
La même chose pour $y \mapsto f_{x_0}(y)$

Theorem 2.12 *Si f est différentiable au point (x_0, y_0), alors les dérivées partielles au point (x_0, y_0) existent et $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $B = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ (où A, B sont les coefficients dans la défintion de différentiabilité).*

Attention : l'inverse n'est pas vrai. Une fonction peut très bien admettre les dérivées partielles (et même toutes les dérivées directionelles qu'on verra après) et n'être pas différentiable et même pas continue ! ! ! ! ! Par exemple, la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

n'est pas continue en $(0,0)$ mais on vérifie facilement que elle admet les dérivées partielles en $(0,0)$.

Par contre, si on demande un peu plus que l'existence des dérivées partielles, alors on peut garantir la différentiabilité.

Définition 2.13 *On dit que f est $\mathcal{C}^1(A)$* si et seulement si *les dérivées partielles existent et sont continues sur l'ensemble A.*

Theorem 2.14 *Si f est $\mathcal{C}^1$ dans un voisinage de (x_0, y_0) alors f est différentiable en (x_0, y_0).*

Remarquez que vérifier la continuité des dérivées partielles est d'habitude plus simple que vérifier la différentiabilité.

2.10.2 Gradient et lignes de niveaux, dérivées directionelles

Définition 2.15 *Le vecteur $\nabla f(x_0, y_0) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0))$ s'appelle* gradient *de f au point (x_0, y_0).*

Définition 2.16 *Soit $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ une vecteur de norme 1, c'est a dire $\sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 1$.*

On appelle dérivée directionelle de f au point (x_0, y_0) *dans la direction* v*, la dérivée de la fonction* $f(x_0 + v_x h, y_0 + v_y h)$ *en* $h = 0$*. Autrement dit*

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0, y_0) = f'(x_0 + v_x h, y_0 + v_y h)|_{h=0}.$$

Remarque 2.17 *Visualisons* $\mathcal{G}_f$ *comme la surface d'une montagne. La fonction partielle* $h \mapsto f(x_0 + v_x h, y_0 + v_y h)$ *représente notre hauteur si on se déplace sur un chemin qui correspond à la droite* $h \mapsto x_0 + v_x h, y_0 + v_y h)$ *au niveau de la mer et* $f'(x_0 + v_x h, y_0 + v_y h)|_{h=0}$ *nous dit la pente de notre chemin, en particulier si nous sommes en train de monter ou de descendre .*

Remarque 2.18 *Bien évidement les dérivées partielles sont un cas particulier des dérivées directionelles.*

Propriétés du gradient

1. Le gradient est orthogonal au lignes de niveaux.
2. si f est différentiable $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{v}$, ou $\cdot$ est le produit scalaire.

2.11 Formule de Taylor au déuxième ordre

Pour déterminer l'allure locale de la surface par rapport au point tangent on a besoin d'une approximation plus précise de la fonction. On veux donner l'equivalent de la formule de Taylor-Young que on a déjà vu pour une variable.

Dérivées d'ordre supérieur Pour cela on doit commecer à definir les dérivées partielles à l'ordre 2. Les dérivées partielle d'orde 2 sont les dérivées partielles des dérivées partielles. On a quatre possibilité. On note :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)\right)|_{(x,y)=(x_0,y_0)}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)\right)|_{(x,y)=(x_0,y_0)}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)\right)|_{(x,y)=(x_0,y_0)}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)\right)|_{(x,y)=(x_0,y_0)}$$

Si la fonction est suffisaiment réguliere, le théorème suivant nous dit que l'ordre de dérivation n'a pas d'importance.

Définition 2.19 *On dit que f est $\mathcal{C}^2(A)$* si et seulement si *les dérivées partielles d'ordre 2 existent et sont continues sur l'ensemble A.*

Theorem 2.20 (Schwarz) *Si f est $\mathcal{C}^2$ dans un voisinage de (x_0, y_0) alors*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$$

Sous forme de matrice les dérivées d'ordre 2 sont données par

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Cette matrice s'appelle *hessien de f*.

On a maintentant tous les ingredient pour écrire la formule de Taylor à l'ordre 2 (voir page suivante).

Theorem 2.21 *Sit f une fonction $\mathcal{C}^2$ dans un voisinage de (x_0, y_0). Alors*

$$f(x,y) = f(x_0,y_0)+\nabla f(x_0,y_0)\cdot\begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix}+(h_x,h_y)H_f(x_0,y_0)\begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix}+||(h_x,h_y)||^2\epsilon(||(h_x,h_y)||)$$

ou $\epsilon(||(h_x,h_y)||) \to 0$ si $||(h_x,h_y)|| \to 0$.

Avec une notation plus explicite :

$$\begin{aligned}
f(x,y) = f(x_0,y_0) &+ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)+ \\
&+ \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 \\
&+ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0)(y-y_0)(x-x_0)+ \\
&+ \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x_0,y_0)(y-y_0)^2 \\
&+ ||(h_x,h_y)||^2\epsilon(||(h_x,h_y)||) \\
&= f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)+ \\
&+ \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) \\
&+ \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x_0,y_0)(y-y_0)^2 \\
&+ ||(h_x,h_y)||^2\epsilon(||(h_x,h_y)||)
\end{aligned}$$

Comme pour les fonction d'une variable les termes de dégrée 0 et 1 nous donnent l'équation du plan tangent

$$z = f(x_0,y_0)+\nabla f(x_0,y_0)\cdot\begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} = f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

sur le premier terme non-nul, on peut lire le signe de la différence. Si on considère le terme d'ordre 2

$$P(h_x,h_y) = (h_x,h_y)H_f(x_0,y_0)\begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix}$$

on voit qu'il s'agit d'un polynôme d'ordre 2.

Si on note

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

On doit donc être capables d'étudier le signe d'un pôlynome du type

$$P(h, k) = ah^2 + 2bhk + ck^2$$

. (toujours positif, toujours negatif, change de signe). On peut avoir le cas suivantes :

1. $P(h, k) > 0$ si $(h, k) \neq (0, 0)$. exemple : $P(h, k) = h^2 + k^2$ dans ce ca **la surface est au dessus** du plan tangent,
2. $P(h, k) < 0$ si $(h, k) \neq (0, 0)$. exemple : $P(h, k) = -h^2 - k^2$ dans ce cas **la surface est en dessous** du plan tangent,
3. $P(h, k) \neq 0$ si $(h, k) \neq (0, 0)$et $P(h, k)$ change de signe, c'est a dire $P(h, k) < 0$ pour certains $(h, k) \neq (0, 0)$ mais $P(h, k) < 0$ pour d'autres. exemple : $P(h, k) = hk$ dans ce cas **la surface traverse** le plan tangent. Exemple $P(h, k) = hk$ ou $P(h, k) = h^2 - k^2$.
4. $P(h, k) \neq 0$ pour des $(h, k) \neq 0$. Exemple : on a pas assez d'information, il faut aller à l'ordre supérieur ou utiliser d'autre moyens. Exemple : $P(h, k) = h^2$.

En général, il existe toujours un changement de variables du type

$$\begin{cases} X = \alpha x + \beta y \\ Y = \gamma x + \delta y \end{cases}$$

avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tel que

$$P(h, k) = ah^2 + 2bhk + ck^2 = AX^2 + BY^2$$

.

Si on arrive exprimer $P(h, k)$ de cette façon on comprend toute de suite si on est dans le cas 1,2,3,4, selon le signes de A et B.

On peut raisonner de deux façon (celle qui est plus simple selon le cas.

Raisonnement 1 :

Si $a \neq 0$, on cherche à exprimer directement $P(h, k)$ comme $AX^2 +$

BY^2. Si $P(h,k) = ah^2 + 2bhk + ck^2$ alors on peut écrire $P(h,k) = ah^2 + 2bhk + (\frac{b}{\sqrt{a}})^2 + (c - (\frac{b}{\sqrt{a}})^2)k^2 = (\sqrt{a}x + \frac{b}{\sqrt{a}})^2 + (c - (\frac{b}{\sqrt{a}})^2)k^2$.

Si $a = 0$ mais $c \neq 0$, on peut inverser le role de a et de c.
Si $a = c = 0$, on est dans le cas $P(h,k) = 2bhk$ qui est clairment dans le cas 3 (pour $b \neq 0$).

Exemples : $P(h,k) = 9h^2+6hk+12k^2 = 9h^2+2(3)hk+k^2-k^2+12k^2 = (3h+k)^2 + 11h^2 = X^2 + Y^2$ avec $X = 3h + k$ et $Y = k$.On est donc dans le cas 1.

$P(h,k) = 9h^2 + 6hk + \frac{1}{2}k^2 = 9h^2 + 2(3)hk + k^2 - k^2 + \frac{1}{2}k^2 = (3h+k)^2 - \frac{1}{2}k^2 = X^2 - Y^2$ avec $X = 3h + k$ et $Y = k$. On est donc dans le cas 3.

$P(h,k) = 9h^2+6hk+k^2 = 9h^2+2(3)hk+k^2-k^2+k^2 = (3h+k)^2 = X^2$. avec $X = 3h + k$ et $Y = k$. On est donc dans le cas 4.

Raisonnement 2 :

On définit *determinant* d'une matrice 2×2 comme

$$\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma.$$

Un théoreme d'algèbre linéaire (qu'on verra l'année prochaine) nous garantie que :

$$\det H_f(x_0, y_0) = \det \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Donc en calculant le déterminant $\det H_f(x_0, y_0)$ on peut savoir si A, B ont le même signe, ou un de deux est 0. Combiné avec le signe de a, c, on peut établir si on est dans le cas 1,2,3,4.

Exemples : $P(h,k) = 9h^2 + 6hk + 12k^2$

$$\det H_f(x_0, y_0) = \det \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 12 \end{pmatrix} = 9 \cdot 12 - 3 \cdot 3 = 108 - 9 > 0$$

Donc $A, B \neq 0$ et A, B ont le même signe. On est soit dans le cas 1 soit dans le cas 2. Puis que $a = 9$, on sait que $f(x, y_0)$ comme fonction d'un variable en x passe au dessus de sa droite tangente. Donc on est dans le cas 1.

$P(h,k) = 9h^2 + 6hk + \frac{1}{2}k^2$.

$$\det H_f(x_0, y_0) = \det \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 9 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot 3 = 4.5 - 9 < 0$$

Donc $A, B \neq 0$ et A, B ont des signes différentes. On est soit dans le cas 3.

$P(h,k) = 9h^2 + 6hk + k^2$

$$\det H_f(x_0, y_0) = \det \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 9 \cdot 1 - 3 \cdot 3 = 9 - 9 = 0$$

Donc $A \cdot B = 0$ c'est à dire au moins un entre A, B est nul. On est donc dans le cas 4.

2.12 Recherche des extrema

Les extrema (locals, globals, strictes ou non strictes) sont défini comme pour les fonction d'une variable.

Suppons que la fonction soit suffisamnet réguliere (par exemple $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$) et que on puisse donc utiliser la formule de Taylor.

Pour chercher les extrema locals, il faut cherchers les points telles que :

1. le plan tangent est horizontal,
2. la différence entre la valeur $f(x, y)$ et celle du plan est soit toujours positive (minimum) soit toujours négative (maximum).

Donc il faut chercher les points tels que

1. $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$,

2. le terme d'ordre 2 dans la formule de Taylor $P(h,k)$ est tels que $P(h,k) > 0$ si $(h,k) \neq (0,0)$(**la surface est au dessus** du plan tangent, minimum), ou $P(h,k) < 0$ si $(h,k) \neq (0,0)$. (**la surface est en dessous** du plan tangent, maximum).

Définition 2.22 *Les points tels que* $\nabla f(x_0, y_0) = (0,0)$ *sont appelés* points critiques.

Définition 2.23 *Si* $\nabla f(x_0, y_0) = (0,0)$ *et on est dans le cas4 (de la section 3.11) on dit que* (x_0, y_0) *est un point de selle.*

Remarque 2.24 *Si on utilise la formule de Taylor, il se peut que* $P(h,k)$ *soit comme dans le cas 4 de la section precendente. Dans ce cas, la formule de Taylor à l'ordre 2 ne nous donne pas assez d'information. Il faut utliser d'autre moyens. Par exemple* $f(x,y) = x^3y$*, l'unique point critique est* $(0,0)$ *mais* $P(h,k) = 0$ *idntiquement. Toutefois par l'étude du signe on trouve facilemnt que on est dans un point de selle (cas 3).*

3 Integration en deux variables

Dans le cas d'une variable on cherche à calculer l'aire comprise entre la courbe qui est un graphe d'une fonction et l'axe des x sur un interval $[a,b]$. On notait cette aire

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x.$$

On cherche maintenant à calculer une le volume compris entre une surface qui est le graphe $\mathcal{G}_f$ d'une fonction et le plan xy sur une region $A \subset \mathbb{R}$.

On denote ce volume par

$$\iint_A f(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

On a déjà discuté la définition précise d'intégral pour une variable.

Pour ce qui concerne ce chapitre, on dira seulement que la définition de Lebesgue se généralise sans changement. Dans ce cours on verra seulement de cas où la définition intuitve de volume est suffisante, et on apprendra à le calculer.

L'idée de base est celle de reduir un l'intégral d'une fonction de deux variables à deux intégrals d'une variable. Avant d'écrire le théoreme général (théoreme de Fubini) faisons quelques exemples où on peut comprendre la procedure de façon intutitive.

Soit $A = [0, 1] \times [0, 2]$. Alors $f(x, y) = x^2 + y$

$$\iint_A f(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_A x^2 + y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_A x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_A y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x \int_0^2\,\mathrm{d}y + \int_0^1\,\mathrm{d}x \int_0^2 y\,\mathrm{d}y = [\frac{x^3}{3}]_0^1 \cdot 2 + 1 \cdot [\frac{y^2}{2}]_0^2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Soit $A = [0, 1] \times [0, 2]$. Alors $f(x, y) = x^2 y$

$$\iint_A f(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_A x^2 + y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_A x^2 y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Dans ce cas on ne peut plus "separer" x et y, mais on peut intégrer une variable à la fois en regardant l'aure comme une constante.

$$\iint_A f(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \int_0^1 x^2 y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+ = \int_0^2 \left[\frac{x^3 y}{3}\right]_0^1 \mathrm{d}y = \int_0^2 \frac{y}{3}\,\mathrm{d}y = \left[\frac{y^2}{6}\right]_0^2 = \frac{2}{3}$$

Soit $f(x, y) = 7$ et A l'ensemble borné delimité par le courbes $(t, t^2)(y = x^2)$ et (t^2, t) $(x = y^2)$. Noter que le deux courbes s'intersectent en $(0, 0)$ et $(1, 1)$. Alors

$$\iint_A f(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} 7\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 [7y]_{x^2}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x =$$

$$7 \int_0^1 \sqrt{x} - x^2\,\mathrm{d}x = 7\left[\frac{2x^{3/2}}{3} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{7}{3}$$

On aura aussi pu inverser l'ordre d'integration, ce qui corrrenspond à inverser le rôle de x et y.

On est prêt maintenat pour approcher un cadre un peu plus cas general.

Theorem 3.1 (Intégration sur un domain simple) *Soit A un ensemble qui peut s'écrire comme $A = \{(x, y) | x \in [a, b], y \in [\alpha(x), \beta(x)]\} = \{(x, y) |\ x \in [\gamma(y), \delta(y)],\ y \in [c, d]\}$, avec δ, γ* continues. *Supponsons que $f(x)$ est continue et*

$$\iint_A f(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

existe et est fini.

Alors

$$\iint_A f(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \int_{\alpha(x)}^{\gamma(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_c^d \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Une idée intuitive de la preuve a été expliquée en classe.

Remarque 3.2 *Quelques fois, en échangeant l'ordre d'intégration, l'intégral double peut dévenir plus facile à evaluer.*

Note : ce théorème peut être étendu dans un cadre plus général (théorème de Fubini et Tonelli).

3.1 Changement des variables dans un intégral

Dans le cas d'une variable, si on fait un changement de variables, il faut mettre un facteur correctif dans l'intégral qui compense le changement de longuer de l'intervalle.
De la même façon ici, il faut introduire un facteur correctif qui compense le changement d'aires. Régardons d'abord un cas simple.

Soit $f(x,y) = 3$.
Soit $A = [0,1] \times [0,1]$. Clairement

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 3 \cdot (1 \cdot 1) = 3$$

Supposons de faire le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} u = 3x \\ v = 2y \end{cases}$$

Pour nous faciliter la vie après, on va utiser la notation suivante.
On définit

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{\Phi} : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & \mathbf{\Phi}(x,y) = (3x, 2y) \end{array}$$

et

$$(u,v) = \mathbf{\Phi}(x,y)$$

Alors $(x, y) \in A = [0,1] \times [0,1]$ si et seulement si $(u, v) \in B = [0,3] \times [0,2]$. En d'autre termes $\mathbf{\Phi}(A) = B = [0,3] \times [0,2]$.

On voit bien que

$$3 = 3 \cdot 1 = \int_A f(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \neq \int_B f(u,v) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v = 3 \cdot (3 \cdot 2) = 3 \cdot 6$$

Il faut introduire un facteur correctif, c'est à dire que **il faut diviser par** $aire(B) = aire(\mathbf{\Phi}([0,1] \times [0,1]))$.

Dans ce cas on sait très bien calculer $aire(B) = aire(\mathbf{\Phi}([0,1] \times [0,1]) = 3 \cdot 6$.
Donc

$$3 = 3 \cdot 1 = \int_A f(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_B f(u,v) \frac{1}{6} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot (3 \cdot 2) = 3$$

Pour de raison de notation, je vais aussi écrire la même chose avec le facteur de correction "dans la partie en x".

$$3 \cdot 6 = 3 \cdot 6 = \int_A f(x,y) 6 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_B f(u,v) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v = 3 \cdot (3 \cdot 2) = 3 \cdot 6 = 18$$

Attention : si on change A, le rapport entre A et $\Phi(A)$ est toujours 6, donc le facteur correctif est toujours 6.

Réagardons maintenant un cas légerment plus compliqué.

Supponons d'avoir un changement de variables du type :

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{\Phi} : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (u,v) = \mathbf{\Phi}(x,y) = (ax + by, cx + dy) \end{array}$$

On peut écrire la même chose *sous forme matricielle* c'est à dire

$$\mathbf{\Phi}(x,y) = (ax + by, cx + dy) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$$

où le produit est dans le sens de produit de matrices.

Si $c = b = 0$, c'est claire que $aire(\mathbf{\Phi}([0,1] \times 0,1])) = aire([0,a] \times [0,d]) = a \cdot d$.

Et dans le cas général ? Dans le cas général, $aire(\mathbf{\Phi}([0,1] \times 0,1]))$ est donnée par le parallelogramme de sommets $(0,0),(a,c),(b.d)(a+d,b+c)$. On peut montrer que son aire est donnée par **le détérminant** de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ défini comme cela :

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Pourquoi ? Vous pouvez la calculer avec les intruments de géométrie éuclidienne, mais le calcul peu être un peut long.. l'explication plus simple est contenue dans le dessin que vous trouvez dans ce lien :

`http://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=./d/determinant.html`

Les détérminant peut être défini aussi pour les matrices d'ordre supérier, mais on verra cela dans le prochain chapitre.

Donc dans notre intégral, si on appelle $J := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on aura :

$$3 = 3 \cdot 1 = \int_A f(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_B f(u,v) \frac{1}{detJ}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v = 3 \cdot \frac{1}{detJ} \cdot (\det J) = 3$$

Ou si on insère le facteur correctif dans l'intégral en x, y, on a

$$3 \cdot detJ = \int_A f(x,y) detJ\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_B f(u,v)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v = 3 \cdot (\det J).$$

Dans le cas général, ce facteur sera *détérminat du Jacobien*. On commence donc à introduire les objet dont on a besoin pour le définir.

Soit $\mathbf{\Phi} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une fonction **bijective** et **différéntiable** donnée par

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{\Phi} : & \mathbb{R}^2 \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (u,v) = (\varphi(x,y), \psi(x,y)) \end{array}$$

On appelle matrice jacobien de $\mathbf{\Phi}$ la matrice $J_{\mathbf{\Phi}}(x,y)$ la matrice donné par

$$J_{\mathbf{\Phi}}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial\psi}{\partial y}(x,y) & \frac{\partial\psi}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

Cette matrice joue le même rôle que joue ∇f pour une fonction d'un variable : en prémier ordre d'approximation $\mathbf{\Phi}(x,y)$ peut-être bien approximé comme

$$(u,v) = J_{\mathbf{\Phi}}(x,y) \cdot (x,y).$$

(où le produit est un produit entre matrices).
Donc près d'un point (x_0, y_0) le facteur correctif à ajouter est l'inverse du determinant de la matrice jacobienne c'est à dire

$$j(x_0,y_0) = \frac{1}{det J_{\mathbf{\Phi}}(x_0,y_0)}$$

Ces observations nous amenent à comprendre, au moins de façon intuitive, la formule du changement de variables suivante.

Proposition 3.3 *Soit* $\mathbf{\Phi} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *une fonction* ***bijective*** *et* ***différéntiable*** *donnée par*

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{\Phi} : & \mathbb{R}^2 \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (u,v) = (\varphi(x,y), \psi(x,y)) \end{array}$$

Alors

$$\iint_A f(x,y) det J_{\mathbf{\Phi}}(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \iint_{\mathbf{\Phi}(A)} f(x(u,v), y(u,v)) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$$

où $J_{\mathbf{\Phi}}(x,y)$ *est la matrice Jacobienne de*

Remarque : $J_{\mathbf{\Phi}}(x,y)$ *est une matrice qui dépend de* (x,y) *donc on doit forçement introduire le facteur* $det J_{\mathbf{\Phi}}(x,y)$ *dans l'intégral qui dépend de* (x,y) *à gauche.*
Mais très souvent dans les application, on a (x,y) *en fonction de nouvelle variable* (u,v) *donc le rôles de* (x,y) *et* (u,v) *sont inversés. Par souci de claireté, on va écrire explicitement la formule dans ce cas aussi.*

Soit le changement de variables donné par la fonction ***bijective*** *et* ***différéntiable*** *donnée par*

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{\Phi}: & \mathbb{R}^2 \to & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \mapsto & (x,y) = \sigma(u,v), \tau(u,v)) \end{array}$$

$J_{\mathbf{\Psi}}(x,y)$ *la matrice donnée par*

$$J_{\mathbf{\Phi}}(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial\tau}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial\tau}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

— alors

$$\iint_{\mathbf{\Psi^{-1}(A)}} f(x(u,v),y(u,v)) \det J_{\mathbf{\Psi}}(x,y) \ \mathrm{d}u \ \mathrm{d}v = \iint_A f(x,y) \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y$$

3.1.1 Cordonnées polaires

Un changement de variables important est celui de cordonnées polaires (qu'on a déjà vu). Calculons le jacobien.

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ w = \rho\sin\theta. \end{cases}$$

$$J_\phi(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho}(\rho,\theta) & \frac{\partial x}{\partial\theta}(\rho,\theta) \\ \frac{\partial y}{\partial\rho}(\rho,\theta) & \frac{\partial y}{\partial\theta}(\rho,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta. \end{pmatrix}$$

Donc $j(\rho,\theta) = \det J(\rho,\theta) = \rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta = \rho.$

Exemple d'application :

Soit $A = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq R\}$ (boule de rayon R).

$$\iint_A 1 \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y = \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} 1 \ \mathrm{d}\theta \right) \rho \ \mathrm{d}\rho = 2\pi \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^R = \pi R^2$$