Donc, on obtient

$$f(x) = ax + b + c\left(\frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{x}\right)\epsilon\left(\frac{1}{x}\right).$$

Donc $y = ax + b$ est l'asymptote, et , si $c \neq 0$, **le signe** de $c\left(\frac{1}{x}\right)$ nous donne la position par rapport à $\mathcal{C}_f$. (Attention : le signe dépende aussi de x, si on prend $x \to +\infty$ ou $-\infty$.) Si $c = 0$, on a pas d'information. Il faut regarder le terme suivant du D.L.

Les exemples seront donnés au T.D.

1.3 Intégration

1.3.1 Généralités

On commence par réviser la notion d'intégrale. En vue de l'intégration en deux variables il est particulièrement important de comprendre le **changement de variable** dans l'intégrale.

La définition intuitive d'intégrale correspond à celle de l'**aire** comprise entre l'axe des abscisses et la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ au dessous d'un intervalle $[a, b]$. Par aire on veut dire **aire avec signe**.

Ils existent des fonctions pour lesquelles le concept intuitif d'aire n'est pas bien défini. Par exemple pour la **fonction de Dirichlet**

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \end{cases}$$

ce ne pas clair quelle quantité doit être regardée comme aire.

Il faut donc une définition précise.
Dans ce cours, on ne rentrera pas dans les subtilités liées à la définition et on regardera que des fonctions pour lesquelles la notion intuitive d'aire est suffisante.

Cependant, pour donner une vision plus complète et pour les étudiants intéressés, on ajoute ici un parenthèse sur la définition.

1.3.2 Parenthèse : quelques mots sur la définition

La définition usuelle donnée dans les cours de première année est celle de l'**intégrale de Riemman**.

Cette définition correspond à approximer l'aire sous la courbe par un multi-rectangle que approche l'aire "par le bas" et un qui l'approche "par le haut" et prendre ensuite leurs "limites". Si les "limites" existent et sont égales, on dit que la fonction est **intégrable** (dans le sens de Riemman).
Voici la construction précise **pour une fonction bornée**. Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$. On divise $[a, b]$ dans n sous-intervalles. Pour cela on choisi $n + 1$ points x_i tels que $x_0 = a$ $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. On appelle P l'ensemble de ce points ($P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$).
Pour le multi-rectangle supérieur, on construit des rectangles qui ont pour base $[x_i, x_{i+1}]$ et pour hauteur sup $f(x)$ sur cet intervalle et on considère leur union. On notera par $S_P(f)$ l'aire du multi-rectangle ainsi construit.

Pour le multi-rectangle inférieur, on construit des rectangles qui ont pour base $[x_i, x_{i+1}]$ et pour hauteur inf $f(x)$ sur cet intervalle et on considère leur union. On notera son aire par $T_P(f)$.

Définition 1.12 *Soit f une fonction bornée définie sur un intervalle $[a, b]$. On dit que f est **intégrable au sens de Riemann** ssi*

$$\sup_{P partition} S_P(f) = \inf_{P partition} T_P(f).$$

Si la fonction est intégrable, alors on note

$$\int_a^b f(x) \ \mathrm{d}x = \sup_{P partition} S_P(f) = \inf_{P partition} T_P(f).$$

Remarque 1.13 *La notation avec le symbole $\int$ rappelle que l'intégrale est une "limite" d'une somme ($\sum$) d'aire de rectangles.*

Remarque 1.14 *La fonction de Dirichlet n'est pas intégrable au sens de Riemann.*

Cette définition ne se généralise pas au deux variables ou bien peut se généraliser avec des difficultés.

Pour cela, une notion différente d'intégrale a été introduite, celle de l'**intégrale de Lesbegue**.

On approche l'aire sous la courbe de façon différente. On prend des fonctions **simples**, c'est à dire, qui prennent un nombre fini de valeurs $s_1, s_2, \ldots, s_n$. On notera une fonction simple par s. Pour ces fonctions, on sait très bien calculer l'aire sous la courbe, elle sera :

$$A(s) = \sum_{i=1}^{n} s_i m(s_i)$$

où $m(s_i)$ est la longueur de l'intervalle (ou des union d'intervalles) ou f prends la valeurs s_i. En réalité, je suis en train de cacher un gros problème : pas tous les ensembles sont des intervalles et on ne peut pas tout le temps leur associer une longueur. Ce problème est traité par la **théorie de la mesure de Lesbegue**, qui dépasse largement le niveau de ces cours. Cependant, si on glisse sur ce problème, la définition d'intégrale de Lesbegue est très claire : on approche l'aire par de fonction simples qui sont majorées par f.

Définition 1.15 *Soit f une fonction bornée définie sur un intervalle $[a, b]$. On dit que f est* ***intégrable au sens de Lebesgue*** ssi

$$\sup_{s \text{ simple, } s \leq f} A(s).$$

Si la fonction est intégrable, alors on note toujours

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = \sup_{s \text{ simple, } s \leq f} A(s).$$

Remarque 1.16 *La fonction de Dirichlet n'est pas intégrable au sens Lesbegue.*

1.4 Propriétés des intégrales

Avec l'interprétation de l'intégral comme aire sous-jacente à une courbe, les deux propriétés suivantes sont intuitives (les étudiants plus motivés pourront chercher de les prouver à partir de la définition, comme exercice).

$$\int_a^b f(x) + g(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$$
$$\int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\ \mathrm{d}x$$

1.5 Calcul d'intégrales : théorème fondamental de l'analyse

Si on devait appliquer la définition pour calculer les intégrales, on s'en sortirait jamais.

Heureusement, un outlil très puissant a été développé par les mathématiciens : le **théorème fondamental de l'analyse** ou **théorème fondamental du calcul différentiel**. La première forme de ce théorème fut publié par James Gregory en 1668 et une forme plus générale par Isaac Barrow, et ensuite la théorie a été développée par Isaac Newton et parallèlement par Gottfried Leibniz.

Theorem 1.17 *Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$. Soit F une fonction telle que $F' = f$.*
Alors
$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

La fonction F s'appelle **primitive** et elle est définie à moin d'une constante. Son nom en anglais est plus parlant : on l'appelle **anti-dérivée**. Ce nom est bien choisi, car, effectivement, on est en train d'inverser l'opération de dérivation.
Notation : F est noté aussi $\int f(x)\ \mathrm{d}x$.

Pour calculer l'intégrale, il suffit donc de savoir trouver une primitive. D'autres exemples et exercices seront donnés aux TD.

En vue du traitement des fonctions en deux variables, on a besoin de bien comprendre le changement de variable dans les intégrales. On regardera aussi l'intégration par parties.

1.5.1 Intégration par changement de variable

On veut comprendre comment l'expression d'un intégrale change sous un changement de variable.

Considérons d'abord une fonction constante égale à c sur un intervalle $[a,b]$ et 0 ailleurs.
Cela va sans dire que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b c\ \ \mathrm{d}x = c\,|b-c|$$

Si on fait un changement de variable du type $s = x+1$ (où 1 est une constante choisie au hasard), on voit toute de suite que $x \in [a,b]$ *ssi* $s \in [a+1, b+1]$. Bien évidement

$$c|b-a| = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a+1}^{b+1} f(s)\,\mathrm{d}s = c \cdot |b-a|.$$

Supposons maintenant de faire un changement de variable du type $s = \frac{x}{7}+1$ (7 est aussi une constante choisie au hasard).

Clairement $x \in [a,b]$ *ssi* $s \in [a/7+1, b/7+1]$.
On voit toute de suite que

$$c|a-b| = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_{a/7}^{b/7} f(s)\,\mathrm{d}s = c \cdot |a/7 - b/7|.$$

Pour avoir égalité, il faut multiplier le terme de droite par 7.

Si on change la constante $1/7$ par une autre constante γ, c'est à dire $s = \frac{1}{\gamma}x+1$, on devra multiplier le résultat par γ. On peut se rappeler facilement de ce facteur de correction en écrivant $\mathrm{d}s = \frac{1}{\gamma}\ \ \mathrm{d}x$.
De cette façon, on a

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a/\gamma+1}^{b/\gamma+1} f(s)\gamma\ \ \mathrm{d}s.$$

Bien sût on peut choisir remplacer 1 par une autre constante η. On aura alors que si $s = \frac{1}{\gamma}x+\eta$,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{a}{\gamma}x+\eta}^{\frac{b}{\gamma}x+\eta} f(s)\ \gamma\ \ \mathrm{d}s.$$

Et si $s = g(x)$ pour g une fonction générale ?
Comme on a vu en détail dans la sect. 1.2, si g est dérivable, près d'un point s_0 la fonction est bien approximée par sa droite tangente, d'équation, c'est à dire $g(s_0+h) = g(s_0)+g'(s_0)h+g\epsilon(h)$. Donc, pour h petit, $g(s_0+h)-g(s)\circ g'(s_0)h$. En d'autres termes, près de s_0, le facteur correctif est $g'(s_0)$. Si on utilise la notation $\mathrm{d}x = g'(s)\,\mathrm{d}s$, on obtient

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(s))g'(s)\ \mathrm{d}s.$$

Donc quand on fait un changement de variable, on doit introduire un facteur correctif dans l'intégrale (en plus de changer les extrêmes d'intégration). Ce facteur correctif correspond à $g'(s)$.

Du point de vue du calcul, on voit bien que si F est une primitive de f, c'est à dire $F' = f$, alors $(F(g(x)))' = f(g(x))g'(x)$. Donc, si $s = g(x)$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x))]_a^b = F(b) - F(a) = F(g(g^{-1}(b)) - F(g(g^{-1}(a)\\ = [F(g(x))]_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(s))g'(s)\ \mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Exemple : En posant $s = \frac{1}{x}$:

$$\int -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int e^s\,\mathrm{d}s = e^s = e^{\frac{1}{x}}.$$

et

$$\int_2^3 -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{1/2}^{1/3} e^s\,\mathrm{d}s = [e^s]_{1/2}^{1/3} = [e^{\frac{1}{x}}]_2^3.$$

D'autres exemples de calcul seront données aux TD.

1.5.2 Intégration par parties

L'intégration par partie est une formule qui suive de la formule de la dérivée d'un fonction produit de deux fonctions dérivables f,g.

Si $h = f \cdot g$, alors

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Donc

$$(f \cdot g)(x) = \int (f \cdot g)'(x) = \int f'(x) \cdot g(x)\ \mathrm{d}x + \int f(x) \cdot g'(x)\ \mathrm{d}x,$$

e donc, on obtient la **formule d'intégration par parties**

$$\int f'(x) \cdot g(x)\ \mathrm{d}x = f(s)g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)\ \mathrm{d}x.$$

Cette formule peut-être utile pour réduire un intégrale à une autre forme, dans laquelle on arrive à deviner une primitive.

Exemple :

$$\int xe^x\ \mathrm{d}x = xe^x - \int 1 \cdot e^x\ \mathrm{d}x = xe^x - e^x.$$

D'autres exemples de calcul, seront données aux TD.

1.5.3 Intégrales généralisées

On a vu pour l'instant, des intégrales de **fonctions limitées** et sur des **intervalles bornés**.

On peut définir les intégrales des **fonctions non limitées** ou sur sur des **intervalles non bornés** comme limites.

Définition 1.18 *Soit f une fonction réelle bornée. On définit*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

et, de façon similaire,

$$\int_{+\infty}^b f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

Définition 1.19 *Soit f une fonction réelle bornée sur $]a, b[$ telle que* $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$*. On défini*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

et, de façon similaire,

$$\int_{-\infty}^b f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

Comme toutes limites, les intégrales généralisées peuvent être finies, infinies, ou ne pas exister.

Par exemple :

$$\int_0^{+\infty} \sin x\ \ \mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \cos(b) - \cos(0) = \nexists$$

$$\int_0^{+\infty} x\ \ \mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \frac{b^2}{2} - 0 = +\infty$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\ \ \mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \frac{-1}{b} - (-1) = 1$$

$$\int_0^1 x\ \ \mathrm{d}x = \lim_{a\to0^+} \frac{1^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\ \ \mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \frac{-1}{1} - \frac{-1}{a} = +\infty.$$

1.5.4 Comportement pour $b \to \pm\infty$:

On regarde ici le comportement pour $b \to +\infty$. Par symétrie le comportement en $-\infty$ est identique. Pour simplicité, on considère des fonctions **positives**.

On remarque que si $0 \geq f(x) \leq g(x)$, on aura

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$$

et donc
$$\int_a^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x \leq \int_a^{+\infty} g(x)\ \mathrm{d}x$$

On peut facilement calculer (exercice) que pour $a > 0$:
$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x = +\infty$$

et que pour $\alpha > 0$
$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^{1+\alpha}}\ \mathrm{d}x < +\infty$$

Donc si une fonction **décroît à l'infini** plus rapidement de $\frac{1}{x^{1+\alpha}}$ (dans le sens $f(x) \leq \frac{1}{x^{1+\alpha}}$), son intégrale sera fini.
Donc si une fonction **décroît à l'infini** mois rapidement de $\frac{1}{x}$ (dans le sens $f(x) \geq \frac{1}{x}$), son intégrale sera infini.

En résumant on a
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\beta}\ \mathrm{d}x = \begin{cases} < \infty\ si & \beta > 1 \\ +\infty\ si & \beta \leq 1 \end{cases}$$

On rappelle que on est déjà capable (voir cours M11, limites fondamentales) d'individuer des "ordres de grandeur de croissance à l'infini" , ce qui nous permet d'en déduire des informations sur les intégrales.
On notera $f \ll g$ pour $x \to \infty$*si et seulement si*
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Par exemple, on sait que
$$\ln x \ll x \ll x^2 \ll \ldots \ll x^n \ll \ldots \ll e^{ax} \quad a > 0, n > 2$$

Donc
$$\frac{1}{lnx} \gg \frac{1}{x} \gg \frac{1}{x^2} \gg \ldots \gg \frac{1}{x^n} \gg .. \gg \frac{1}{e^{ax}}$$

Par conséquent
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\ln x}\ \mathrm{d}x \geq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x = +\infty$$

et

$$+\infty > \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \geq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x \geq \int_1^{+\infty} \frac{1}{e^{ax}}\,\mathrm{d}x \quad a > 0, n > 2$$

On peut faire la même deduction toutes les fois que on a des inégalités similaires.

1.5.5 Comportement pour $a \to 0^{\pm}$:

Il faut faire attention à ne pas mélanger le comportement en 0 et celui àl' $+\infty$!!!

On a déjà vu que pour $x \to 0$,

$$\sqrt{x} \lll x \lll x^2 \lll x^3 \lll x^4 \lll \text{ etc.}$$

On peut facilement calculer (exercice) que pour $a > 0$:

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = +\infty$$

et que pour $a > 0$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{1-a}}\,\mathrm{d}x < \infty$$

On a donc

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{\beta}}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} < \infty \ si & \beta < 1 \\ +\infty \ si & \beta \geq 1 \end{cases}$$