1.1.2 Derivée

La dérivée d'une fonction est définie comme la limite suivante :

Définition 1.3 *Soit x_0 un point de $\mathbb{R}$ tel que f est définie dans un intervalle ouvert contenant x_0.*
On dit que f est dérivable au point x_0 si e seulement si la limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existe et elle est finie (ou de façon équivalente existe dans $\mathbb{R}$). Lorsque la limite existe, elle est notée $f'(x_0)$ et elle est appelée dérivée*.*

On rappelle les deux interprétations suivantes.

Interprétation géométrique

Par définition, la dérivée est la limite pour $h \to 0$ de la *pente* d'une droite qui passe par les points $(x_0, f(x_0))$ et $(x_0 + h, f(x_0 + h))$.
La droite limite est la tangente (par définition de tangente).
Donc, lorsqu'elle existe, la dérivée est la **pente de la tangente**.
Par conséquent, si la tangente existe, elle doit avoir équation :

$$y = f'(x_0)x + b$$

En posant comme condition que la tangente passe par $(x_0, f(x_0))$, on obtient

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

En vue du traitement de développements limitées, on remarque que si f est dérivable en x_0, alors la courbe représentative de la fonction $\mathcal{C}_f$ est "bien approchée" par sa tangente, **près du point** x_0. Plus précisément, on peut écrire,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\epsilon(x - x_0)$$

avec $\epsilon(x - x_0) \to 0$ pour $x \to 0$.
En utilisant la notation $h = x - x_0$, on peut écrire

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + h\epsilon(h)$$

avec $\epsilon(h) \to 0$ pour $x \to 0$.

Interprétation dynamique

Supposons que la variable x représente le temps et $f(x)$ la distance parcourue. On le notera alors t et $d(x)$. La quantité

$$\frac{d(t_0 + h) - d(t_0)}{h}$$

est clairement la *vitesse moyenne* si on se déplace entre un temps t_0 et un temps $t + h$.
La limite

$$d'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{d(t_0 + h) - d(t_0)}{h}$$

est donc la vitesse instantanée au temps t_0.

Du point de vue historique, la théorie de la dérivation est strictement liée au développement de la mécanique classique, en particulier la mécanique celeste au XVII siècle. Deux grands noms liée à la naissance du calcul différentiel sont Isaac Newton (Woolsthorpe-by-Colsterworth, 1642- Londres, 1727), avec son traité fondamental *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* et Gottfired Leibniz (Liepzig 1646-1716), connu aussi comme philsophe.

À noter que le calcul différentiel a pu se développer même sans une notion claire de limite. Le manque d'une définition précise a amené à plusieurs débats, de nature plutôt philosophique, sur la signification de "quantités infinies", "infiniment petites", "infinitesimales". À cette époque il n'existait pas une séparation nette entre les différentes branches du savoir (en particulier entre science et philosophie).

La notion de limite a été formalisé presque deux siècles plus tard, en particulier par Wilhelm Weierstrass (Ostenfelde, 1815, Berlin, 1897) et généralisée ensuite.

1.2 Développements limités et formule de Taylor

Le but des développements limités est celui de **approximer la valeur de la fonction f par un polynôme** près d'un point x_0 . Bien évidement un polynôme est bien plus facile à manipuler qu'une fonction définie analytiquement ou comme solution d'une équation différentielle. Quand il est possible d'approximer une fonction f par un polynôme, on dit que f **admet un développement limité**. L'ordre du développement limité mesure la précision de notre approximation.

Voici une définition précise.
Ici on note $h = x - x_0$. Si $x \to x_0$, alors $h \to 0$.

Définition 1.4 (Développement limité) *Soit f une fonction définie au voisinage de x_0. On dit que f admet un développement limité (D.L.) à l'ordre n en x_0 lorsqu'il existe des constantes $a_0,a_1, \dots ,a_n \in \mathbb{R}$ et une fonction ε définie au voisinage de x_0 tels que*

1. *$\varepsilon(h) \to 0$ quand $h \to 0$*
2. *pour tout h dans un voisinage de 0 on a*

$$f(x_0 + h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + a_3 h^3 + \ldots + a_n h^n + \epsilon(h)h^n.$$

*Le polynôme $P(x) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + a_3 h^3 + \ldots + a_n h^n$ s'appelle alors **partie principale** du D.L..*

Notation : Ici on a choisi de noter le reste $h^n\epsilon(h)$. Une notation alternative très répandue est $o(h^n)$. Cela signifie la même chose : on dit que $f(h) = o(g(h))$ pour $h \to 0$ *si et seulement si*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{g(h)} = 0.$$

Remarque 1.5 *Si h est petit, alors $h > h^2 > h^3 > h^4 > \ldots$.*
***Près de 0**, le terme h^{n+1} est **négligeable** par rapport au terme h^n.*
Cela peut s'exprimer en disant

$$\lim_{h\to 0} \frac{h^{n+1}}{h^n} \to 0.$$

*L'expression $\epsilon(h)$ ne représente pas une fonction précise mais une fonction générique qui tombe vers 0 quand $h \to 0$. On **ne connaît pas** la valeur de $\epsilon(h)$.*
*L'expression $h^n\epsilon(h)$ veut dire que le terme $h^n\epsilon(h)$ est **négligeable** par rapport au terme h^n. Cela s'exprime en disant*

$$\lim_{h\to 0} \frac{h^n\epsilon(h)}{h^n} \to 0.$$

Remarque 1.6 *Comme on a dit, si h est petit (plus précisément si $h < 1$), alors $h > h^2 > h^3 > h^4 > \ldots$.*
***Près de 0**, le terme h^{n+1} est **négligeable** par rapport au terme h^n.*

*Pour mieux visualiser cela, on peut penser en termes d'**ordres de grandeurs** (le même concept que en physique).*
En physique, on exprime les ordres de grandeurs par rapport au puissances de 10. Si $h = \frac{1}{10} = 10^{-1}$, alors $h^2 = \frac{1}{100} = 10^{-2}$, $h^3 = \frac{1}{1000} = 10^{-3}$, etc. Donc h^2 est un quantité d'un ordre de grandeur inférieur à h, h^3 est un quantité d'un ordre de grandeur inférieur à h^2, etc.
*Dans certaines contextes, si une quantité est d'un ordre de grandeur inférieur à une autre, on peut la considérer **négligeable** (par rapport à l'autre). Par exemple dans les expériences en physique, on considère négligeables toute les quantités qui ont un ordre de grandeur inférieur à ce des instruments de mesure.*

Donc pour trouver un développement limité, on doit être capables de :
-trouver le polynôme $P(x)$.
-savoir estimer l'erreur que on fait en faisant cette approximation.

Commençons par remarquer que cela n'est pas toujours possible.

Considérons les fonctions suivantes :
$$f_1(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ 1 \text{ si } x > 0 \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } x \leq 0 \\ x \text{ si } x > 0 \end{cases} \quad f_3(x) = \begin{cases} sin(\frac{1}{x}) \text{ si } x \leq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$
On voit immédiatement que les fonctions f_1, f_2, f_3 n'admettent pas de développement limitées (exercice fait en classe).

Pour le D.L. à l'ordre 1, on a déjà vu que l'existence d'un D.L en x_0 est équivalent à la dérivabilité. En d'autres termes, f admet un D.L à l'ordre 1 si et seulement si elle est dérivable.

Cela **n'est plus vrai** pour les ordres supérieurs.
Une fonction peut admettre un D.L. à l'ordre n, sans être n fois dérivable.
Par exemple, la fonction
$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

admet un D.L. à l'ordre 2 en $x_0 = 0$, donné par $f(h) = 0+0\cdot h+0\cdot h^2+h^2\epsilon(h)$, mais f n'est pas dérivable (voir exercice fait un classe).

Par contre, si f est n fois dérivables, le théorème de Taylor-Young nous permet de trouver le D.L.

Theorem 1.7 *Taylor-Young Soit f une fonction n fois dérivable en x_0. Alors f admet un D.L. à l'ordre n, donné par*

$$f(x_0+h) = f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}h^2+\frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}h^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n+h^n\epsilon(h).$$

où $\epsilon(h) \to 0$ pour $h \to 0$.

Remarque 1.8 *Dans cette version du théorème, le reste est exprimé sous la forme $h^n\epsilon(h)$. Cela s'appelle le* ***reste de Peano****.*

Remarque 1.9 *Il existe plusieurs versions de ce théorème.*
*Dans la littérature (c'est à dire dans d'autre texte de mathématiques), on peut trouver des hypothèses plus fortes. Ces hypothèses supplémentaires sont nécessaires pour avoir plus d'information sur le reste, notamment l'écrire sous d'autres formes (****reste de Cauchy****,* ***reste de Lagrange****,* ***reste en forme d'intégrale****).*
Dans ce cours, on verra seulement la version avec le ***reste de Peano****.*

Dans les textes français, on trouve souvent l'hypothèse f de classe $\mathcal{C}^n$ près de x_0 pour la forme de Peano (c'est à dire f est dérivable n fois et les dérivées sont continues dans un voisinage de x_0), bien qu'elle ne soit pas une hypothèse minimale (c'est à dire bien que une hypothèse plus faible aurait suffit).

1.2.1 Règles de composition du D.L.

Un des avantages du D.L. est la possibilité de composer les développements, ce qui amène à pouvoir obtenir rapidement les D.L. des fonctions composées.