

Feuille de T.D. 2: Intégrales

Note: on peut trouver la solution de certains exercices sur le polycopié de Mme Faccononi.

Par intégration directe

Exercice 1 Calculer les primitives suivantes par intégration directe (ou par une transformation simple).

1. $\int 2x^3 - 3x + 1 \, dx$

2. $\int \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} \, dx$

3. $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}} \, dx$

4. $\int \sqrt{2x+1} \, dx$

5. $\int e^{2x+1} \, dx$

6. $\int \sqrt[4]{(x-1)^3} \, dx$

7. $\int \frac{e^x}{1+e^x} \, dx$

8. $\int xe^{x^2} \, dx$

9. $\int \sin^3(x) \cos(x) \, dx$

10. $\int \frac{6}{5x+1} \, dx$

Par changement de variable

Exercice 2 Calculer les primitives suivantes par changement de variable.

1. $\int \frac{\sin(\ln(x))}{x} \, dx$

2. $\int \frac{1+e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$

3. $\int \frac{1}{\sqrt{x(1+\sqrt{x})}} \, dx$

4. $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} \, dx$

5. $\int e^x \ln(1+e^x) \, dx$

6. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$

7. $\int \frac{\cos(x)}{1+\sin x} \, dx$

8. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \, dx$

$$9. \int (2x - 1) \cos(x^2 - x + 3) \, dx \quad 10. \int \frac{4x + 3}{\sqrt{2x^2 + 3x + 3}} \, dx$$

Par parties

Exercice 3 Calculer les intégrales suivantes en utilisant l'intégration par parties.

$$1. \int x \ln x \, dx$$

$$5. \int \frac{\ln(x)}{x^2} \, dx$$

$$2. \int x \sin x \, dx$$

$$6. \int \frac{\ln(\ln(x))}{x} \, dx$$

$$3. \int x^2 e^x \, dx$$

$$7. \int \ln(x + 1) \, dx$$

$$4. \int x^2 \cos(x) \, dx$$

$$8. \int e^{2x} \sin(3x) \, dx$$

Fractions rationnelles

Exercice 4 Calculer les primitives de fonctions suivantes.

$$1. \int \frac{a}{(x - b)} \, dx$$

$$4. \int \frac{1}{7 + 2x^2} \, dx$$

$$2. \int \frac{a}{(x - b)^n} \, dx \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

$$5. \int \frac{2x - 1}{(x - 2)(x - 2)} \, dx \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

$$3. \int \frac{1}{1 + x^2} \, dx$$

$$6. \int \frac{3x + 1}{x^3 - 4} \, dx$$

Pour la méthode générale voir la feuille complémentaire sur la page web.

Calculs d'aire et problèmes

Exercice 5 Calculer les aires suivantes.

$$1. \int_{-1}^1 \frac{1}{1 + x^2} \, dx$$

$$2. \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{1+3x^2} dx$$

Exercice 6 Calculer les aires comprises entre les courbes :

$$1. f(x) = -x^2 + x + 2 \text{ et } g(x) = x^2 - 3x + 2$$

$$2. f(x) = \frac{x^3}{4} \text{ et } g(x) = x^2 - x$$

Exercice 7 Calculer l'aire intérieure de l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Exercice 8 La valeur moyenne de la fonction $f : x \mapsto x^3$ sur l'intervalle $[0, k]$ est égale à 9. Calculer k .

Intégrales généralisés

Exercice 9 Calculer les intégrales généralisées suivantes.

$$1. \int_0^1 \ln x dx ;$$

$$3. \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx ;$$

$$2. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} ;$$

$$4. \int_0^\infty e^{-\sqrt{x}} dx ;$$

Exercice 10 Étudier la convergence des intégrales généralisées suivantes.

$$1. \int_0^\infty \sin x dx ;$$

$$4. \int_1^\infty \frac{e^{1/x}}{x^2} dx ;$$

$$2. \int_0^1 \frac{dx}{e^x - 1} ;$$

$$5. \int_0^\infty \arctan \frac{1}{x} dx.$$

$$3. \int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{e^x - 1}} dx ;$$

Exercice 11 On cherche à prouver l'existence de

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx.$$

1. Montrer que $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ existe.
2. Montrer que $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx$ existe.
3. En intégrant par parties, en déduire que $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ converge.

Exercice 12 (Intégrale de Bertrand) Étudier en fonction de $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ la convergence de l'intégrale généralisée

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}.$$

Exercices complémentaires

Exercice 13 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^n dx$.

1. Exprimer I_n en fonction de I_{n-2} .
2. En déduire la valeur de I_n pour tout n (distinguer les n pairs et impairs).

Exercice 14 Soit $n \in \mathbb{N}$; on cherche à déterminer, si elle existe, la valeur de l'intégrale généralisée

$$\Gamma_n = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx.$$

1. Montrer que la fonction définie par $f(x) = x^{n+2}e^{-x}$ est bornée pour $x \in [1, +\infty[$.
2. En déduire que l'intégrale Γ_n existe.
3. Calculer Γ_0 et Γ_1 .
4. En intégrant par parties, trouver une relation entre Γ_{n+1} et Γ_n .
5. En déduire la valeur de Γ_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.