Université de Nice Sophia Antipolis

Habilitation à diriger des recherches

Présentée par **Jérôme Vétois**

Phénomènes de concentration pour des équations et des systèmes elliptiques critiques

Soutenue le 22 juin 2017 devant le jury composé de :

Philippe Delanoë	Examinateur, CNRS / Univ. de Nice Sophia Antipolis
Emmanuel Hebey	Examinateur, Université de Cergy-Pontoise
Otared Kavian	Rapporteur, Université de Versailles Saint-Quentin
Gilles Lebeau	Examinateur, Université de Nice Sophia Antipolis
Frank Pacard	Rapporteur, École polytechnique
Tristan Rivière	Examinateur, ETH Zürich
Frédéric Robert	Examinateur, Université de Lorraine
Michaël Struwe	Rapporteur, ETH Zürich

Remerciements

J'adresse mes remerciements les plus vifs à Otared Kavian, Frank Pacard et Michaël Struwe qui m'ont fait l'honneur d'être rapporteurs de ce mémoire ainsi qu'à Philippe Delanoë, Emmanuel Hebey, Gilles Lebeau, Tristan Rivière et Frédéric Robert qui m'ont fait l'honneur d'accepter d'être membres de mon jury. Je tiens également à exprimer toute ma gratitude à Gilles Lebeau d'avoir appuyé ma demande d'Habilitation à Diriger des Recherches auprès de l'Université de Nice Sophia Antipolis.

Mes pensées et remerciements vont ensuite à mes collègues et amis du Laboratoire J.A. Dieudonné qui m'ont beaucoup apporté, tant sur le plan humain que mathématique. Je pense bien sûr en particulier aux membres de l'équipe Géométrie, Analyse et Dynamique, ainsi qu'à mes compagnons de bureau, Anna, Jean-Pierre et Martine, dont j'ai partagé la bonne humeur quotidienne.

Je remercie chaleureusement tous mes collaborateurs. Je remercie les institutions qui m'ont accueilli pour des séjours de travail. Je remercie l'ANR et le CRSNG pour leur soutien financier ainsi que le CNRS pour les délégations qu'il m'a accordé.

J'adresse enfin des pensées affectueuses et pleines de reconnaissance à mes amis et ma famille, en particulier mes parents, pour leur présence et leur soutien inestimables.

MÉMOIRE D'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES : PHÉNOMÈNES DE CONCENTRATION POUR DES ÉQUATIONS ET DES SYSTÈMES ELLIPTIQUES CRITIQUES

JÉRÔME VÉTOIS

Table des matières

Introduction

Les travaux présentés dans ce mémoire concernent des équations et des systèmes elliptiques non linéaires. L'exemple type d'équation qui nous intéresse est l'équation de Schödinger stationnaire

$$\Delta_g u + hu = |u|^{2^*-2} u \quad \text{sur } M, \tag{0.1}$$

où (M, g) est une variété riemannienne ou un domaine de l'espace euclidien de dimension $n \geq 3$, $\Delta_g = -\operatorname{div}_g \nabla$ est l'opérateur de Laplace–Beltrami, h est une fonction sur M et $2^* = 2n/(n-2)$.

Une difficulté majeure dans l'étude d'équations du type (0.1) est l'existence de phénomènes de concentration. Ces phénomènes, bien connus, sont liés à la non-compacité de l'injection dans l'espace de Lebesgue critique $L^{2^*}(M)$ de l'espace de Sobolev $H^1(M)$ défini comme le complété de l'espace des fonctions lisses sur M pour la norme

$$\|u\|_{H^1(M)} = \left(\|\nabla u\|^2_{L^2(M)} + \|u\|^2_{L^2(M)} \right)^{1/2}.$$

Les résultats de ce mémoire visent à mieux comprendre sous quelles conditions et sous quelles formes ces phénomènes de concentration peuvent se produire.

Les équations considérées dans ce mémoire peuvent être reliées à différents domaines des mathématiques et des sciences appliquées. A titre d'exemple, l'équation (0.1) est reliée aux ondes stationnaires des équations de Schrödinger et Klein–Gordon non linéaires en physique théorique, mais elle joue également un rôle fondamental dans le domaine de la géométrie conforme dans le cas où $h \equiv h_g$, où

$$h_g = \frac{n-2}{4(n-1)} \operatorname{Scal}_g, \tag{0.2}$$

où Scal_g est la courbure scalaire de la variété (cf. les références historiques d'Aubin [34], Schoen [132], Trudinger [151] et Yamabe [156]). Mentionnons également le lien entre l'équation (0.1) et le cas stationnaire dans le modèle de biologie de Gierer et Meinhardt [78] (cf. le problème de Lin, Ni et Takagi [104, 105]).

Ce mémoire est divisé en trois parties :

- La première partie est consacrée à l'étude d'équations elliptiques scalaires posées sur des variétés riemanniennes compactes. Pour ces équations, nous présentons des résultats d'instabilité et des constructions de solutions à un ou plusieurs pics. Ces résultats sont issus de sept publications dont deux en collaboration avec Pierpaolo Esposito et Angela Pistoia (cf. [9, 10]), une en collaboration avec Angela Pistoia (cf. [11]) et quatre en collaboration avec Frédéric Robert (cf. [12–15]) et d'une prépublication en collaboration avec Pierre-Damien Thizy (cf. [16]).
- La deuxième partie est consacrée à l'étude de deux types de systèmes d'équations elliptiques posés sur des variétés riemanniennes compactes : les systèmes d'équations de Schrödinger fortement couplés et les systèmes de Klein–Gordon–Maxwell–Proca. Pour ces systèmes, nous présentons des résultats de stabilité et d'instabilité. Ces résultats sont issus de deux publications en collaboration avec Olivier Druet et Emmanuel Hebey (cf. [7, 8]).
- La troisième partie est consacrée à l'étude d'équations dégénérées et anisotropes posées sur des domaines de l'espace euclidien. Pour ces équations, nous présentons divers résultats qui visent à décrire

les phénomènes de concentration dans les espaces d'énergie. Ces résultats sont issus de quatre publications écrites en tant que seul auteur (cf. [17–20]).

1. Équations elliptiques

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte, lisse, sans bord, de dimension $n \geq 3$. Soit m un entier supérieur ou égal à 1 et h une fonction de classe C^m sur M. Sauf indication contraire, nous supposons dans cette partie que l'opérateur $\Delta_g + h$ est *coercif*, c'est-à-dire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\int_M \left(|\nabla u|_g^2 + hu^2 \right) dv_g \geq C \|u\|_{H^1(M)}^2 \qquad \forall u \in H^1(M),$$

où $|\cdot|_g$ et dv_g sont respectivement la norme et l'élément de volume associés à la métrique g.

Dans cette partie, nous nous intéressons à la question de la stabilité des solutions de l'équation de Schödinger stationnaire (0.1) sous l'effet de perturbations soit de la fonction potentielle h, soit de l'exposant critique 2^*. Autrement dit, nous étudions le comportement des familles de solutions $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ d'équations du type

$$\Delta_g u_\varepsilon + h_\varepsilon u_\varepsilon = |u_\varepsilon|^{2^*-2} u_\varepsilon \quad \text{sur } M \tag{1.1}$$

ou

$$\Delta_g u_\varepsilon + h u_\varepsilon = |u_\varepsilon|^{p_\varepsilon-2} u_\varepsilon \quad \text{sur } M, \tag{1.2}$$

où $(h_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est une famille de fonctions qui converge vers h dans $C^m(M)$, $m \geq 1$, et $(p_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est une famille de nombres réels qui converge vers 2^* lorsque $\varepsilon \to 0$. Si nous supposons de plus que $p_\varepsilon \in [2, 2^*]$ pour tout $\varepsilon > 0$, alors la théorie de la régularité elliptique nous donne que les solutions $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ sont de classe $C^{2,\theta}$ pour tout $\theta \in]0,1[$ (cf. le livre de Gilbarg et Trudinger [79] sur la théorie générale et l'article de Trudinger [151] sur le cas spécifique des équations critiques).

Nous consacrons la section 1.1 à quelques préliminaires théoriques sur les phénomènes de concentration, puis nous examinons le cas de l'équation (1.1) dans la section 1.2 et le cas de l'équation (1.2) dans la section 1.3.

1.1. **Préliminaires théoriques.**

Dans cette section, nous présentons quelques aspects théoriques bien connus sur les phénomènes de concentration pour les équations de type (1.1) et (1.2). Nous renvoyons aux livres de Druet, Hebey et Robert [73], Hebey [84], Kavian [95], et Struwe [141] pour des discussions plus approfondies sur la théorie et les applications des phénomènes de concentration pour ce type d'équation.

Il est maintenant bien compris que les phénomènes de concentration pour les équations de type (1.1) et (1.2) sont caractérisés par la présence de pics de solutions (également appelés bulles) qui ont pour modèle les solutions de l'équation

$$\Delta_{\delta_0} u = |u|^{2^*-2} u \quad \text{sur } \mathbb{R}^n, \tag{1.3}$$

où δ_0 est la métrique euclidienne. Ces phénomènes de concentration sont liés à la loi d'invariance de l'équation (1.3), à savoir : si u est une solution de l'équation (1.3), alors pour tout $\mu > 0$ et $\xi \in \mathbb{R}^n$, la fonction $u_{\mu,\xi}$ définie par

$$u_{\mu,\xi}(x) = \mu^{\frac{2-n}{2}} u\big(\mu^{-1}(x-\xi)\big) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \tag{1.4}$$

est solution de l'équation (1.4).

Nous savons d'après les travaux de Caffarelli, Gidas et Spruck [43] (voir aussi Obata [119]) que l'ensemble des solutions positives de l'équation (1.4) est constitué des fonctions $U_{\mu,\xi}$ définies par

$$U_{\mu,\xi}(x) = \left(\frac{\sqrt{n(n-2)}\,\mu}{\mu^2 + |x-\xi|^2_{\delta_0}}\right)^{\frac{n-2}{2}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.5}$$

où $\mu \geq 0$ et $\xi \in \mathbb{S}^n$. Par des calculs très simples, nous pouvons voir que la norme L^{2^*} de $U_{\mu,\xi}$ et la norme L^2 du gradient de $U_{\mu,\xi}$ sont indépendantes de μ. En revanche, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, nous avons que la norme C^0 de $U_{\mu,\xi}$ tend vers l'infini lorsque $\mu \to 0$ sur tout domaine de $\mathbb{R}^n$ qui contient le point ξ. En effet, nous pouvons voir que $U_{\mu,\xi}(\xi) \to \infty$ lorsque $\mu \to 0$.

D'après Struwe [140] (voir aussi Hebey [73, théorème 3.3] et Vétois [4, lemme 3.1] pour des énoncés du résultat de Struwe dans le contexte que nous considérons ici), nous savons que pour toute famille de solutions $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ bornée dans $H^1(M)$ des équations (1.1) ou (1.2), il existe une suite $(\varepsilon_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}}$ de nombres réels strictement positifs qui converge vers 0 telle que la suite $(u_{\varepsilon_\alpha})_{\alpha\in\mathbb{N}}$ se décompose de la manière suivante :

$$u_{\varepsilon_\alpha} = u_0 + \sum_{i=1}^{k} \chi\left(d_g\left(\cdot, \xi_{i,\alpha}\right)\right) \lambda_i \mu_{i,\alpha}^{\frac{2-n}{2}} U_i\big(\mu_{i,\alpha}^{-1} \exp_{\xi_{i,\alpha}}^{-1}(\cdot)\big) + \phi_\alpha \tag{1.6}$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, où $\chi : [0,\infty[\to [0,\infty[$ est une fonction de type « cutoff » centrée en 0, d_g est la distance associée à la métrique g, $\exp_\xi$ est la fonction exponentielle centrée au point $\xi \in M$, $(\phi_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions sur M qui converge vers 0 dans $H^1(M)$, u_0 est une solution de l'équation (0.1), $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $i \in \{1,\dots,k\}$, $\lambda_i = 1$ dans le cas de l'équation (1.1), $\lambda_i \geq 1$ dans le cas de l'équation (1.2), $(\mu_{i,\alpha})_{\alpha\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels strictement positifs qui converge vers 0, $(\xi_{i,\alpha})_{\alpha\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de M qui converge vers $\xi_i \in M$ et U_i est une solution non triviale de l'équation (1.3). Si nous supposons de plus que les fonctions $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}}$ sont positives, alors les fonctions $U_1,\dots,U_k$ sont également positives.

En utilisant des estimations elliptiques classiques (cf. Gilbarg et Trudinger [79]), nous pouvons démontrer que si $k\neq 0$, alors la norme C^0 des solutions $(u_{\varepsilon_\alpha})_{\alpha\in\mathbb{N}}$ tend vers l'infini. Nous disons dans ce cas que la suite $(u_{\varepsilon_\alpha})_{\alpha\in\mathbb{N}}$ est *non compacte.*

D'autres références historiques sur les phénomènes de concentration sont dues notamment à Brézis et Coron [39], Lions [106, 107], Sacks et Uhlenbeck [129], Schoen [134] et Wente [155]. Plus récemment, une version C^0 des décompositions (1.6) pour les familles de solutions positives de l'équation (1.1) a été obtenue par Druet, Hebey et Robert [73].

1.2. **Perturbations de la fonction potentielle.**

Nous présentons dans cette section des résultats obtenus dans diverses collaborations avec Pierpaolo Esposito, Angela Pistoia, Frédéric Robert et Pierre-Damien Thizy sur l'instabilité des solutions positives de l'équation (1.1).

1.2.1. *Bref historique.*

Commençons par rappeler brièvement les principaux résultats connus pour les familles de solutions positives $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ de l'équation (1.1) dans le cas où

$$h_\varepsilon\equiv h\equiv h_g\qquad\forall\varepsilon>0\,,$$

où h_g est la fonction potentielle définie en (0.2). Autrement dit, supposons dans un premier temps que $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est une famille de solutions de l'équation de Yamabe.

Dans le cas de la sphère standard $(\mathbb{S}^n,g_0)$, il a été démontré par Obata [119] que l'ensemble des solutions positives de l'équation de Yamabe est constitué des fonctions $V_{\mu,\xi}$ définies par

$$V_{\mu,\xi}(x)=\left(\frac{\sqrt{n\,(n-2)}\,\mu}{\mu^2+2-2\cos\left(d_{g_0}(x,\xi)\right)}\right)^{\frac{n-2}{2}}\qquad\forall x\in\mathbb{S}^n,\tag{1.7}$$

où $\mu\geq 0$ et $\xi\in\mathbb{S}^n$. Nous pouvons en fait déduire ce résultat de la formule (1.5) en remarquant que l'équation de Yamabe sur la sphère standard se ramène à l'équation (1.3) par projection stéréographique. Il est facile de voir que les fonctions $V_{\mu,\xi}$ forment une famille de solutions uniformément bornées dans $H^1(M)$ dont la norme C^0 tend vers l'infini lorsque $\mu\to 0$.

Si la variété est localement conformément plate et non conformément difféomorphe à la sphère standard, alors Schoen [135] a démontré que les solutions de l'équation de Yamabe sont uniformément bornées dans $C^{2,\theta}(M)$ pour tout $\theta\in\,]0,1[$ et donc en particulier toute famille de solutions $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ de l'équation de Yamabe converge à sous-suite près dans

$C^2(M)$ vers une solution u_0. Ce résultat a par la suite été généralisé au cas des variétés de dimension $n \leq 24$ non conformément difféomorphes à la sphère standard par Khuri, Marques et Schoen [97] (cf. Druet [67], Li et Zhang [99,100], Li et Zhu [101] et Marques [111] pour des résultats précédents en dimensions inférieures). Des contre-exemples à ce résultat ont étés obtenus par Brendle [37] en dimension $n \geq 52$ et par Brendle et Marques [38] en dimension $25 \leq n \leq 52$.

Examinons à présent la question de la stabilité, c'est-à-dire le comportement des familles de solutions positives $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ de l'équation (1.1) dans le cas où

$$h_\varepsilon \to h \quad \text{dans } C^1(M)$$

lorsque $\varepsilon \to 0$ pour une fonction potentielle h arbitraire. Cette question a été introduite et étudiée dans une série de travaux de Druet [66, 67], Druet et Hebey [68,69] et Druet, Hebey et Robert [73]. Il a été démontré par Druet [66] que si la norme H^1 des solutions $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée, $n \geq 4$, l'opérateur $\Delta_g + h$ est coercif et

$$h(x) \neq h_g(x) \qquad \forall x \in M,$$

alors $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge à sous-suite près dans $C^2(M)$ vers une solution u_0 de l'équation (0.1), à l'exception du cas particulier où $h > h_g$ et $n = 6$. Des contre-exemples explicites à ce résultat ont été construits sur des quotients de la sphère standard par Druet et Hebey [68, 69] dans le cas où $h \equiv h_g$, $h_\varepsilon \neq h$ et $n \geq 6$ et dans le cas où $h > h_g$, $h_\varepsilon \neq h$ et $n = 6$.

Nous savons de plus (cf. Li et Zhu [101] en dimension $n = 3$ et Druet [67] en dimension $n \geq 4$) que les solutions positives de l'équation (1.1) sont uniformément bornées dans $C^{2,\theta}(M)$ pour tout $\theta \in]0,1[$ dans le cas où

$$h(x) < \begin{cases} h_g(x) + c_0 & \text{si } n = 3 \\ h_g(x) & \text{si } n \geq 4 \end{cases} \qquad \forall x \in M, \tag{1.8}$$

où c_0 est une constante qui dépend de la variété et qui est strictement positive si et seulement si la variété est non conformément difféomorphe à la sphère standard. Des contre-exemples à ce résultat pour des fonctions potentielles $h > h_g$ dans le cas de la sphère standard ont été obtenus par Hebey et Wei [87] en dimension $n = 3$ et par Chen, Wei et Yan [46] en dimension $n \geq 5$.

1.2.2. *Instabilité de l'équation de Yamabe.*

Dans le cas où $n \geq 4$ et $h \equiv h_g$, nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 1.1 (Esposito, Pistoia et Vétois [10]). *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte, lisse, sans bord, de dimension $n \geq 4$,* *non conformément difféomorphe à la sphère standard et telle que le laplacien conforme* $\Delta_g + h_g$ *est coercif. Posons*

$$h_\varepsilon(x) = h_g(x) + \varepsilon \hat{h}(x) \tag{1.9}$$

pour tout $x \in M$ *et* $\varepsilon > 0$, *où* $\hat{h}$ *est une fonction de classe* C^1 *sur* M *dont le maximum est strictement positif. Dans le cas où* $n \geq 6$ *et* (M, g) *n'est pas localement conformément plate, nous supposons de plus que l'ensemble* $\left\{x \in M : h(x) \geq 0\right\}$ *est inclus dans l'intérieur du support de la courbure de Weyl. Alors pour* $\varepsilon > 0$ *petit, il existe une famille de solutions positives* $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ *de l'équation* (1.1) *qui est bornée dans* $H^1(M)$ *et dont la norme* C^0 *tend vers l'infini lorsque* $\varepsilon \to 0$.

Il suit du résultat de Druet [66] que nous avons mentionné dans la section précédente que pour obtenir un résultat tel que celui du théorème 1.1 il est nécessaire en dimension $n \geq 4$ d'avoir $h_\varepsilon(x) \to h_g(x)$ au moins en un point x de la variété lorsque $\varepsilon \to 0$, hormis dans le cas particulier où $n = 6$. Si de plus nous posons (1.9), alors il est également nécessaire que le maximum de la fonction $\hat{h}$ soit strictement positif, au moins en dimension $n \in \{4, 5\}$. En effet, pour ces dimensions, Druet [67] a démontré que si $h_\varepsilon \to h_g$ lorsque $\varepsilon \to 0$ et

$$h_\varepsilon(x) \leq h_g(x) \qquad \forall x \in M,$$

alors les solutions positives de l'équation (1.1) sont uniformément bornées dans $C^{2,\theta}(M)$ pour tout $\theta \in]0, 1[$, sauf bien entendu dans le cas de la sphère standard. Il est raisonnable de conjecturer que ce résultat devrait se généraliser aux variétés de dimension $n \leq 24$ comme dans le cas où $h \equiv h_g$ (cf. Khuri, Marques, et Schoen [97])

Dans l'espace $H^1(M)$, les solutions que nous construisons dans le théorème 1.1 satisfont

$$u_\varepsilon = \left(\frac{\sqrt{n(n-2)}\mu_\varepsilon}{\mu_\varepsilon^2 + d_g(\xi_\varepsilon, \cdot)^2}\right)^{\frac{n-2}{2}} + \mathrm{o}(1), \tag{1.10}$$

où $\mu_\varepsilon > 0$, $\mu_\varepsilon \to 0$, $\xi_\varepsilon \to \xi_0 \in M$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Nous retrouvons ici le même comportement asymptotique que pour les solutions (1.7) de l'équation de Yamabe sur la sphère standard.

Pour démontrer le théorème 1.1, il est en fait nécessaire d'utiliser un modèle de solutions plus précis que (1.10). Dans le cas des variétés non localement conformément plates de dimension $n \geq 6$, nous pouvons utiliser un modèle de solutions qui s'appuie sur la géométrie locale de la variété (cf. Esposito, Pistoia et Vétois [9]). En revanche, dans le cas des variétés localement conformément plates ou de dimension $n \in \{4, 5\}$, le modèle de solutions que nous utilisons s'appuie notamment sur la fonction de Green du laplacien conforme qui dépend de la géométrie globale de la variété. Nous retrouvons ici la même dichotomie entre deux cas que dans la résolution de l'équation de Yamabe en courbure scalaire positive (cf. Aubin [34] et Schoen [132]). Un autre ingrédient essentiel dans notre modèle de solutions est la construction d'une famille régulière de coordonnées conformes normales en tout point de la variété, du type de celles introduites par Lee et Parker dans leur travail [98] sur le problème de Yamabe.

La démonstration du théorème 1.1 s'appuie d'autre part sur une réduction de type Lyapunov–Schmidt. Cette méthode consiste à résoudre l'équation (1.1) d'abord sur un sous-espace de $H^1(M)$ où l'équation peut être résolue de manière unique, puis sur l'orthogonal de ce sous-espace qui est de dimension finie. Par cette méthode, nous obtenons des solutions proches de notre modèle de solutions, à un reste près. L'estimation de ce reste est ensuite une étape cruciale de la démonstration. L'origine de cette méthode remonte aux travaux de Lyapunov [109, 110] et Schmidt [131]. Elle a été utilisée par Rey [128] dans le contexte des équations elliptiques critiques sur des domaines bornés de l'espace euclidien. Les travaux de Brendle [37], Brendle et Marques [38], Chen, Wei et Yan [46] et Hebey et Wei [87] mentionnés dans la section précédente utilisent cette méthode (voir aussi les références [53–56, 58, 59, 77, 116, 117, 121, 122, 144] mentionnés dans la suite de ce mémoire). Dans le contexte des équations elliptiques critiques sur les variétés, nous pouvons également citer les constructions de solutions singulières de l'équation de Yamabe par Mazzeo et Pacard [112, 113] qui utilisent cette méthode, ainsi que les travaux récents de Premoselli [125] et Premoselli et Wei [126] sur les constructions de familles de solutions non compactes d'équations de type Einstein–Lichnerowicz. Il est bien entendu que cette liste ne prétend à aucune exhaustivité.

Remarquons enfin que nous pouvons tirer de la démonstration du théorème 1.1 une information supplémentaire qui concerne le point limite ξ_0 dans (1.10), à savoir que dans le cas où $n \geq 6$ et la variété n'est pas localement conformément plate, le point ξ_0 est un point maximum de la fonction

$$\xi \mapsto \frac{\hat{h}(\xi)}{\left|\mathrm{Weyl}_g(\xi)\right|_g}, \tag{1.11}$$

où Weyl_g est la courbure de Weyl de la variété, et dans le cas où la variété est soit de dimension $n \in \{4, 5\}$, soit localement conformément plate, le point ξ_0 est un point maximum de la fonction

$$\xi \mapsto \hat{h}(\xi) A_\xi^{-\frac{2}{n-2}}, \tag{1.12}$$

où A_ξ est la masse de la projection stéréographique de la variété au point $\xi \in M$ (cf. Lee et Parker [98] pour les définitions de la masse et de la projection stéréographique). En utilisant l'hypothèse du théorème 1.1 sur le support de la fonction $\hat{h}$, nous avons que la fonction (1.11) est bien définie et continue sur ce support. En ce qui concerne la fonction (1.12), nous savons d'après les travaux de Schoen et Yau [136, 137] que la masse A_ξ est strictement positive pour tout $\xi \in M$ lorsque la variété n'est pas conformément difféomorphe à la sphère standard, et donc la fonction (1.12) est bien définie et continue sur toute la variété dans les conditions du théorème 1.1.

1.2.3. *Solutions à plusieurs pics.*

La question suivante qui nous intéresse est de déterminer quels sont les profils asymptotiques possibles pour les familles de solutions positives de l'équation (1.1) qui sont bornées dans $H^1(M)$ et dont la norme C^0 tend vers l'infini. Dans les conditions du théorème 1.1, nous avons établi l'existence de familles de solutions positives de l'équation(1.1) de la forme (1.10), ce qui correspond au cas où $k = 1$ dans les décompositions de Struwe (1.6). Il est naturel de se demander s'il existe des familles de solutions positives de l'équation (1.1) de la même équation pour lesquelles $k \geq 2$. Druet et Hebey [68, 69] ont démontré l'existence de telles solutions dans le cas de quotients de la sphère standard en dimension $n \geq 6$. Nous nous intéressons ici au cas des variétés non sphériques.

Pour tout $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, nous appelons *famille de solutions à k pics* toute famille de solutions qui satisfait un développement asymptotique du type (1.6). Les points $\xi_1, \dots, \xi_k$ obtenus en passant à la limite dans les suites $(\xi_{1,\alpha})_\alpha, \dots, (\xi_{k,\alpha})_\alpha$ sont appelées *points de concentration.* Nous disons que les points de concentration sont *distincts* si $\xi_i \neq \xi_j$ pour tout $i, j \in \{1, \dots, k\}$ tels que $i \neq j$.

Nous présentons dans ce qui suit des résultats d'existence de solutions positives à plusieurs pics de l'équation (1.1). Nous traitons dans ces résultats les deux cas suivants : le cas de plusieurs points de concentration distincts et le cas d'un unique point de concentration qui satisfait une propriété dite de non isolation.

1.2.3.1. *Le cas de plusieurs points de concentration distincts*

Dans le cas où les points de concentration sont distincts, nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 1.2 (Esposito, Pistoia et Vétois [10])**.** *Soit* (M, g) *une variété riemannienne compacte, lisse, sans bord, de dimension* $n \geq 6$ *telle que le laplacien conforme* $\Delta_g + h_g$ *est coercif. Supposons que nous sommes dans l'un des deux cas suivants :*

(i) soit (M, g) *n'est pas localement conformément plate et* $n \geq 6$*,*

(ii) soit (M, g) *est localement conformément plate, non conformément difféomorphe à la sphère standard et* $n \geq 7$*.*

Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Posons h_ε *comme dans* (1.9)*. Dans le cas (i), nous supposons de plus que l'ensemble* $\{x \in M : h(x) \geq 0\}$ *est l'union d'au moins k composantes connexes disjointes* *incluses dans l'intérieur du support de la courbure de Weyl. Alors pour* $\varepsilon > 0$ *petit, il existe une famille de solutions positives* $(u_{k,\varepsilon})_\varepsilon$ *à* k *pics de l'équation* (1.1) *dont les points de concentration sont distincts.*

La différence majeure entre les cas *(i)* et *(ii)* dans le théorème 1.2 provient de l'interdépendance entre les différents points de concentration des solutions que nous construisons. Dans le cas *(i)*, les points de concentration $\xi_1, \dots, \xi_k$ sont tels qu'il existe $t_1, \dots, t_k \in]0, \infty[$ tels que le point $(t_1, \dots, t_k, \xi_1, \dots, \xi_k)$ maximise localement la fonction d'énergie définie par

$$\sum_{i=1}^{k} \left(c_1 t_i^2 \hat{h}(\xi_i) - c_2 t_i^4 \left| \mathrm{Weyl}_g(\xi_i) \right|_g^2 \right), \tag{1.13}$$

où $c_1, c_2 > 0$ sont des constantes et Weyl_g est la courbure de Weyl de la variété. Nous pouvons voir qu'il n'y a dans (1.13) aucun terme d'interaction entre les différents points de concentration. L'existence d'un maximum local pour la fonction (1.13) est assurée par l'hypothèse du théorème 1.2 sur le support de la fonction $\hat{h}$.

En revanche, des termes d'interaction apparaissent dans le cas *(ii)*. Dans ce cas, la fonction d'énergie s'écrit

$$c_1 \sum_{i=1}^{k} t_i^2 \hat{h}(\xi_i) - c_2 \sum_{i=1}^{k} t_i^{n-2} A_{\xi_i} - c_3 \sum_{i=1}^{k} \sum_{j \neq i} t_i^{\frac{n-2}{2}} t_j^{\frac{n-2}{2}} G_g(\xi_i, \xi_j), \tag{1.14}$$

où $c_1, c_2, c_3 > 0$ sont des constantes, G_g est la fonction de Green du laplacien conforme et A_ξ est comme dans (1.12) pour tout $\xi \in M$. Nous obtenons dans ce cas l'existence d'un maximum global pour la fonction définie en (1.14) lorsque la dimension est supérieure ou égale à 7, c'est-à-dire lorsque les exposants sur t_i et t_j dans le dernier terme sont strictement supérieurs à 2.

1.2.3.2. *Le cas d'un point de concentration non isolé*

Examinons à présent la question de l'existence de familles de solutions positives de l'équation (1.1) dont les points de concentration ne sont pas distincts. En particulier, intéressons-nous à l'existence de point de concentration non isolés au sens de la définition suivante introduite par Schoen [133] : un point $\xi_0 \in M$ est appelé *point de concentration isolé* d'une famille de solutions positives $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ de l'équation (1.1) si pour tout voisinage Ω du point ξ_0, la valeur maximale des solutions $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ sur Ω tend vers l'infini et s'il existe une famille de points $(\xi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ de M telle que les conditions suivantes sont satisfaites :

- Les points $(\xi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ convergent vers ξ_0 lorsque $\varepsilon \to 0$.
- Pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction u_ε atteint un maximum local en ξ_ε.
- Il existe deux constantes $C, r > 0$ telles que $u_\varepsilon(x) \le C d_g(x, \xi_\varepsilon)^{\frac{2-n}{2}}$ pour tout $\varepsilon > 0$ et $x \in M$ tel que $d_g(x, \xi_0) \le r$.

La notion de points de concentration isolés s'est avérée très utile dans l'analyse des équations elliptiques critiques. En effet, les démonstrations des résultats de compacité de l'ensemble des solutions de l'équation de Yamabe que nous avons mentionnés dans la section 1.2.1 ont toutes comme première étape de démontrer que les points de concentration des solutions sont isolés.

Dans le cas où la famille $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $H^1(M)$, nous pouvons démontrer (cf. Robert et Vétois [14, dernières lignes de la preuve du théorème 1.1]) que pour avoir l'existence d'un point de concentration isolé, il est nécessaire qu'il existe une suite de points $(\xi_\alpha)_\alpha$ de M qui converge vers un point de concentration et telle que les nombres $(\mu_{1,\alpha})_\alpha, \dots, (\mu_{k,\alpha})_\alpha$ et les points $(\xi_{1,\alpha})_\alpha, \dots, (\xi_{k,\alpha})_\alpha$ dans les décompositions de Struwe [140] sont tels que l'on ait

$$\text{soit } d_g(\xi_{i,\alpha}, \xi_\alpha) \not\to 0, \text{ soit } d_g(\xi_{i,\alpha}, \xi_\alpha) = \mathrm{O}(\mu_{i,\alpha}) \tag{1.15}$$

lorsque $\alpha \to \infty$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$.

Un exemple type de situation dans laquelle aucune des conditions dans (1.15) n'est satisfaite et donc dans laquelle il existe un point de concentration non isolé est le cas où il existe une constante C et deux suites $(\mu_\alpha)_\alpha$ et $(r_\alpha)_\alpha$ telles que

$$\begin{cases} \dfrac{1}{C}\mu_\alpha \le \mu_{i,\alpha} \le C\mu_\alpha \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}, \\ \dfrac{1}{C} r_\alpha \le d_g(\xi_{i,\alpha}, \xi_{j,\alpha}) \le C r_\alpha \quad \forall i, j \in \{1, \dots, k\}, i \neq j, \\ r_\alpha \to 0 \quad \text{et} \quad \mu_\alpha = \mathrm{o}(r_\alpha) \end{cases} \tag{1.16}$$

lorsque $\alpha \to \infty$. Cette situation est illustrée dans la figure 1 où, pour simplifier, la métrique est supposée euclidienne, $\mu_{1,\alpha} = \dots = \mu_{k,\alpha} = \mu_\alpha$ et les points $\xi_{1,\alpha}, \dots, \xi_{k,\alpha}$ sont placés de manière symétrique le long d'un cercle.

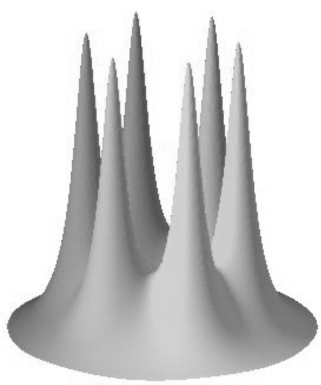

FIGURE 1. Représentation 3D d'un point de concentration non isolé de type (1.16) (calculé à partir de la formule (1.6) avec la métrique euclidienne, $n = 4$, $u_0 = \phi_\alpha = 0$, $k = 6$, $\xi_{i,\alpha} = (\cos(i\pi/3), \sin(i\pi/3), 0, 0)$ et $\mu_{i,\alpha} = 1/5$ pour tout $i \in \{1, \dots, 6\}$).

Dans le cas de la dimension $n = 3$, il suit du travail de Li et Zhu [101] (cf. Hebey [84, théorème 6.3]) que si l'opérateur $\Delta_g + h$ est coercif, alors les points de concentration des famille de solutions positives de l'équation (1.1) sont toujours isolés.

Nous présentons dans les théorèmes 1.3 et 1.4 ci-après deux résultats d'existence de points de concentration non isolés, le premier en dimension $n \geq 6$ dans le cas où $h \equiv h_g$ et le second en dimension $n \in \{4, 5\}$ dans le cas où $h \equiv 0$.

Notre premier résultat concernant les points de concentration non isolés est le suivant :

Théorème 1.3 (Robert et Vétois [14])**.** *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte, lisse, sans bord, non localement conformément plate de dimension $n \geq 6$. Supposons que le laplacien conforme $\Delta_g + h_g$ est coercif. Soit k et m deux entiers supérieurs ou égaux à 1. Alors il existe une famille de fonctions $(h_{k,m,\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ qui converge vers h_g dans $C^m(M)$ et une famille de solutions positives $(u_{k,m,\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ à k pics de l'équation* (1.1) *avec un point de concentration non isolé du type* (1.16)*.*

Nous renvoyons également au travail récent de Pistoia et Vaira [121] pour une construction de points de concentration non isolés dans le cas où $h_\varepsilon \equiv h_g + \varepsilon$ dans les mêmes conditions que dans le théorème (1.3) avec l'hypothèse supplémentaire que la norme de la courbure de Weyl admet un minimum non dégénéré.

Notre second résultat concernant les points de concentration non isolés est le suivant :

Théorème 1.4 (Thizy et Vétois [16])**.** *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte, lisse, sans bord, de dimension $n \in \{4, 5\}$. Supposons qu'il existe $\xi_0 \in M$ tel que*

$$\mathrm{Scal}_g(\xi_0) = \min_M \mathrm{Scal}_g < 0$$

et la hessienne de la courbure scalaire est définie positive au point ξ_0. Posons $h_\varepsilon \equiv \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Alors pour $\varepsilon > 0$ petit, il existe une famille de solutions positives $(u_{k,\varepsilon})_\varepsilon$ à k pics de l'équation (1.1) *avec un point de concentration non isolé du type* (1.16)*.*

Il est intéressant ici de mentionner que d'après les résultats de compacité de Brézis et Li [40] en dimension $n = 3$ et Thizy [147] en dimension $n \geq 6$, nous avons que dans le cas où $h_\varepsilon \equiv \varepsilon$ les dimensions 4 et 5 sont les seules dimensions pour lesquelles les famille de solutions positives bornées dans $H^1(M)$ de l'équation (1.1) peuvent avoir des points de concentration, qu'ils soient d'ailleurs isolés ou non. L'existence de solutions positives à un pic pour cette équation en dimension $n \in \{4, 5\}$ a été démontrée par Thizy [147].

L'une des différences principales entre les théorèmes 1.3 et 1.4 est que dans le cas où la fonction potentielle limite h est identiquement nulle, c'est-à-dire dans la situation du théorème 1.4, l'opérateur $\Delta_g + h$ a un noyau non trivial qui est constitué des fonctions constantes. Ce noyau joue un rôle non négligeable dans la construction des solutions du théorème 1.4. Dans ce cas, les solutions que nous construisons sont de la forme

$$u_{k,\varepsilon} = z_\varepsilon + \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\sqrt{n(n-2)}\mu_{i,\varepsilon}}{\mu_{i,\varepsilon}^2 + d_g(\xi_{i,\varepsilon}, \cdot)^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} + \phi_\varepsilon \,, \tag{1.17}$$

où $(z_\varepsilon)_\varepsilon$ est une famille de fonctions constantes strictement positives qui converge vers 0, $(\mu_{1,\varepsilon})_\varepsilon, \dots, (\mu_{k,\varepsilon})_\varepsilon$ et $(\xi_{1,\varepsilon})_\varepsilon, \dots, (\xi_{k,\varepsilon})_\varepsilon$ sont comme dans (1.6) avec $\xi_1 = \cdots = \xi_k = \xi_0$ et $(\phi_\varepsilon)_\varepsilon$ est un terme de reste orthogonal a un sous-espace de dimension finie de $H^1(M)$ qui inclut les fonctions constantes. En particulier, il est intéressant de comparer le terme z_ε dans (1.17) avec les solutions constantes

$$u_{0,\varepsilon} \equiv \varepsilon^{\frac{n-2}{4}}$$

de l'équation (1.1). En dimension $n = 5$, nous obtenons $z_\varepsilon \sim u_{0,\varepsilon}$ lorsque $\varepsilon \to 0$. En revanche, nous obtenons un résultat très différent en dimension $n = 4$, à savoir

$$z_\varepsilon \sim \varepsilon^{-1} e^{-\frac{s_\varepsilon}{\varepsilon}} \quad \text{où} \quad s_\varepsilon \to s_0 \in \,]0, \infty[$$

lorsque $\varepsilon \to 0$, ce qui traduit une influence plus forte de la présence de pics sur le terme constant en dimension $n \geq 4$.

1.3. **Perturbations de l'exposant critique.**

Intéressons-nous à présent à l'équation (1.2) où la fonction potentielle est désormais fixée et où nous faisons varier l'exposant dans la partie non linéaire. Nous distinguons deux cas pour ce type d'équations :

(i) les perturbations sous-critique $p_\varepsilon \nearrow 2^*$ (i.e. $p_\varepsilon < 2^*$ et $p_\varepsilon \to 2^*$),

(ii) les perturbations sur-critique $p_\varepsilon \searrow 2^*$ (i.e. $p_\varepsilon > 2^*$ et $p_\varepsilon \to 2^*$).

Les résultats que nous présentons dans ce mémoire concernent uniquement le cas où $p_\varepsilon \nearrow 2^*$. Nous renvoyons à la thèse de doctorat de l'auteur et à Micheletti, Pistoia et Vétois [3] pour des résultats dans le cas où $p_\varepsilon \searrow 2^*$ sur les solutions positives de l'équation (1.2).

Nous présentons dans cette section des résultats obtenus dans diverses collaborations avec Anna-Maria Micheletti, Angela Pistoia et Frédéric Robert sur l'instabilité des solutions positives ou changeant de signe de l'équation (1.2).

1.3.1. *Le cas des solutions positives.*

Commençons par rappeler les principaux résultats connus dans le cas des solutions positives de l'équation (1.2). Si $h \equiv h_g$, alors les résultats de compacité de l'ensemble des solutions de l'équation de Yamabe que nous avons mentionnés dans la section 1.2.1 continuent de s'appliquer dans le cas où $p_\varepsilon \nearrow 2^*$ (cf. Druet [67], Khuri, Marques et Schoen [97], Li et Zhang [99,100], Li et Zhu [101] et Marques [111]). De même pour les bornes a priori obtenues par Druet [67] et Li et Zhu [101] dans le cas où la fonction potentielle satisfait l'inégalité (1.8).

En revanche, comme nous allons le voir dans le théorème 1.5 ci-après, contrairement à la situation pour l'équation (1.1), le résultat de compacité de Druet [66] ne s'étend pas au cas où $h > h_g$ pour les solutions bornées dans $H^1(M)$ de l'équation (1.2). Nous utilisons dans le théorème 1.5 la définition suivante : un point critique ξ_0 d'une fonction f de classe C^1 sur M est dit C^1*–stable* s'il existe une carte (ψ, Ω) de M telle que les conditions suivantes sont satisfaites :

- $\xi_0 \in \Omega$ est l'unique point critique de f dans $\overline{\Omega}$.
- $\deg\left(\nabla(f \circ \psi), \psi^{-1}(\Omega), 0\right) \neq 0$, où $\deg(\cdot,\cdot,\cdot)$ est le degré topologique de Brouwer.

Dans le cas où f est de classe C^2, il est facile de vérifier que tout point critique de f pour lequel la hessienne est non dégénérée est un point critique C^1–stable de f.

Nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 1.5 (Micheletti, Pistoia et Vétois [3], Pistoia et Vétois [11])**.** *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte, lisse, sans bord, de dimension $n \geq 4$. Soit h une fonction de classe C^1 sur M telle que l'opérateur $\Delta_g + h$ est coercif. Supposons qu'il existe un point critique C^1–stable ξ_0 de la fonction $h - h_g$ tel que*

$$h(\xi_0) > h_g(\xi_0). \tag{1.18}$$

Posons $p_\varepsilon = 2^* - \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. Alors pour $\varepsilon > 0$ petit, il existe une famille de solutions positives $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ à un pic (comme définit dans la section 1.2.3) de l'équation (1.2).

Nous avons obtenu ce résultat en dimension $n \geq 6$ dans [3], en collaboration avec Anna-Maria Micheletti et Angela Pistoia, et nous l'avons généralisé au cas où $n \in \{4, 5\}$ dans [11], en collaboration avec Angela Pistoia. Ce dernier article [11] traite également du cas des solutions changeant de signe, ce qui est le sujet de la prochaine section.

1.3.2. *Le cas des solutions changeant de signe.*

Une première différence majeure entre les solutions changeant de signe et les solutions positives pour ce type d'équation est apparue dans le travail de Ding [64] dans le cas de l'équation de Yamabe sur la sphère standard. Ding [64] a démontré que dans ce cas, il existe un nombre infini de solutions changeant de signe qui, contrairement aux solutions positives de cette équation (cf. Obata [119]), ne sont pas équivalentes les unes aux autres par rotation ou changement d'échelle. Sur le sujet de la diversité des solutions changeant de signe de l'équation de Yamabe sur la sphère standard, nous renvoyons également aux constructions récentes de del Pino, Musso, Pacard et Pistoia [58, 59] et Musso et Wei [117]. Pour des résultats d'existence et de multiplicité de solutions changeant de signe d'équation du type (0.1), nous renvoyons entre autres, sans prétension d'exhaustivité, aux articles de Bahri et Lions [35], Cerami, Solimini et Struwe [44], Clapp et Weth [49] et Devillanova et Solimini [60, 61] dans le cas d'un domaine borné de l'espace euclidien et aux articles de Ammann et Humbert [31], Djadli et Jourdain [65], Hebey et Vaugon [86], Holcman [90], Jourdain [93] et Vétois [4] dans le cadre d'une variété riemmannienne compacte.

En ce qui concerne la compacité des familles de solutions changeant de signe de l'équation (1.2), nous avons le résultat suivant qui est issu de notre thèse de doctorat (cf. Vétois [4]) : si (1.8) est satisfaite, $n \geq 7$ et (M, g) est localement conformément plate, alors toute famille de solutions $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ bornée dans $H^1(M)$ de l'équation (1.2) converge à sous-suite près dans $C^2(M)$ vers une solution u_0 de l'équation (0.1).

Dans ce qui suit, nous présentons des résultats d'existence de familles de solutions changeant de signe à un ou plusieurs pics de l'équation (1.2). Ces résultats peuvent être regardés comme une contrepartie du résultat de compacité que nous avons mentionné dans le paragraphe précédent.

1.3.2.2. *Les tours de pics.*

Notre premier résultat concernant les solutions changeant de signe est le suivant :

Théorème 1.6 (Pistoia et Vétois [11])**.** *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte, lisse, sans bord, de dimension $n \geq 4$. Soit h une fonction de classe C^1 sur M telle que l'opérateur $\Delta_g + h$ est coercif. Supposons qu'il existe un point critique C^1–stable ξ_0 de la fonction $h - h_g$ tel que l'inégalité* (1.18) *est satisfaite. Posons $p_\varepsilon = 2^* - \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Alors pour $\varepsilon > 0$ petit, il existe une famille de solutions changeant de signe $(u_{k,\varepsilon})_\varepsilon$ de l'équation* (1.2) *de la forme*

$$u_{k,\varepsilon} = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \left(\frac{\sqrt{n(n-2)}\mu_{i,\varepsilon}}{\mu_{i,\varepsilon}^2 + d_g(\xi_{i,\varepsilon}, \cdot)^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} + \phi_\varepsilon \,, \tag{1.19}$$

où $(\mu_{1,\varepsilon})_\varepsilon, \dots, (\mu_{k,\varepsilon})_\varepsilon$, $(\xi_{1,\varepsilon})_\varepsilon, \dots, (\xi_{k,\varepsilon})_\varepsilon$ et $(\phi_\varepsilon)_\varepsilon$ sont comme dans (1.6) *avec $\xi_1 = \dots = \xi_k = \xi_0$.*

En particulier, le théorème 1.6 fournit des exemples de familles de solutions changeant de signe de l'équation (1.2) qui sont bornées dans $H^1(M)$ et dont la norme C^0 tend vers l'infini, ce qui, comme nous l'avons mentionné plus haut, est impossible dans le cas où l'inégalité

(1.8), c'est-à-dire l'inégalité inverse de (1.18), est satisfaite, au moins pour les variétés localement conformément plates de dimension $n \geq 7$ (cf. Vétois [4]).

Les solutions que nous construisons dans le théorème 1.6 sont d'un type différent de celles des théorèmes 1.3 et 1.4. Non seulement elles changent de signe, mais également les nombres $(\mu_{1,\varepsilon})_\varepsilon, \dots, (\mu_{k,\varepsilon})_\varepsilon$ et les points $(\xi_{1,\varepsilon})_\varepsilon, \dots, (\xi_{k,\varepsilon})_\varepsilon$ sont tels que

$$\mu_{i+1,\varepsilon} = \mathrm{o}\left(\mu_{i,\varepsilon}\right) \quad \text{et} \quad d_g\left(\xi_{i,\varepsilon}, \xi_{k,\varepsilon}\right) = \mathrm{o}\left(\mu_{i,\varepsilon}\right) \tag{1.20}$$

lorsque $\varepsilon \to 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$. En particulier, il suit de (1.20) que la seconde condition dans (1.15) est satisfaite contrairement au cas des théorèmes 1.3 et 1.4.

Lorsque les deux conditions dans (1.20) sont satisfaites, les solutions sont communément appelées des *tours*. Nous renvoyons entre autres, sans prétention d'exhaustivité, aux travaux de del Pino, Dolbeault et Musso [55, 56], Pistoia et Weth [122], Ge, Jing et Pacard [77] et Musso et Pistoia [116] pour des constructions de tours dans le contexte d'un domaine borné de l'espace euclidien. Dans le cas du théorème 1.6, les tours que nous construisons ont des pics de signes alternés du au terme $(-1)^{i+1}$ dans la formule (1.19). Cette situation est illustrée dans la figure 2 où, pour simplifier, la métrique est supposée euclidienne et $\xi_{1,\varepsilon} = \cdots = \xi_{k,\varepsilon}$.

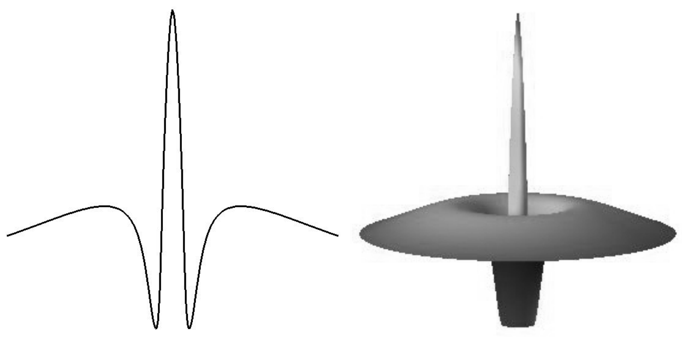

FIGURE 2. Représentations 2D et 3D d'une tour à trois pics de signes alternés (calculée à partir de la formule (1.19) avec la métrique euclidienne, $n = 4$, $u_0 = \phi_\varepsilon = 0$, $k = 3$, $\xi_{1,\varepsilon} = \xi_{2,\varepsilon} = \xi_{3,\varepsilon} = 0$, $\mu_{1,\varepsilon} = 1$, $\mu_{2,\varepsilon} = 1/10$ et $\mu_{3,\varepsilon} = 1/20$). Ces représentations utilisent l'échelle non linéaire argsh de manière à atténuer les écarts.

1.3.2.2. *Recollement d'un pic négatif sur une solution positive*

Nous présentons dans dans les théorèmes 1.7 et 1.8 ci-après des résultats qui établissent l'existence de familles de solutions non compactes qui changent de signe de l'équation (1.2) d'un type différent de celles du théorème 1.6. Nous obtenons ces résultats dans des cas différents de ceux du théorème 1.6, à savoir le cas d'une fonction potentielle $h \in C^1(M)$ quelconque en dimension $n \in \{3, 4, 5, 6\}$ et le cas où $h \equiv h_g$ pour les variétés localement conformément plates ou de dimension $n \leq 9$.

Pour ces résultats, nous supposons dans un premier temps qu'il existe une solution u_0 strictement positive *non dégénérée* de l'équation (0.1), c'est-à-dire telle qu'il n'existe pas de solution non triviale φ de l'équation linéaire

$$\Delta_g \varphi + h\varphi = (2^* - 1)\, u_0^{2^*-2} \varphi \quad \text{sur } M. \tag{1.21}$$

Nous reviendrons dans la prochaine section sur le cas où la solution u_0 est dégénérée. Notons cependant qu'il n'est pas possible de supprimer complètement l'hypothèse de non-dégénérescence. En effet, nous pouvons démontrer (cf. Robert et Vétois [12, proposition 3.1]) que les théorèmes 1.3 et 1.4 ci-après ne sont pas vrai dans le cas de l'équation de Yamabe sur la sphère standard, un cas où toutes les solutions strictement positives (cf. (1.7)) sont dégénérées. Notons également que cette hypothèse de non-dégénérescence est satisfaite de manière générique au sens où toute solution dégénérée de l'équation (0.1) peut être approchée par des solutions non dégénérées en perturbant légèrement soit la métrique (cf. Khuri, Marques et Schoen [97, théorème 10.3]), soit la fonction potentielle (cf. Robert et Vétois [12, proposition 3.2]).

A titre d'exemple pour illustrer cette condition de non dégénérescence, examinons le cas de la variété produit $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{S}^{n-1}$, où $r > 0$, munie de la métrique produit standard et supposons que la fonction potentielle h est constante et strictement positive. En utilisant la connaissance explicite du spectre de l'opérateur de Laplace–Beltrami dans ce cas, nous pouvons calculer (cf. Robert et Vétois [12, proposition 3.4]) que la solution constante $u_0 \equiv h^{(n-2)/4}$ de l'équation (0.1) est non dégénérée si et seulement si

$$\frac{4}{n-2}\, h \notin \left\{ \frac{i^2}{r^2} + j\,(n - 2 + j) : \quad i, j \in \mathbb{N} \right\}. \tag{1.22}$$

En particulier, dans le cas où $h \equiv h_g$ (avec ici $h_g \equiv (n-2)^2/4$), la condition (1.22) s'écrit

$$r \notin \left\{ \frac{i}{\sqrt{n-2}} : \quad i \in \mathbb{N} \right\}.$$

Nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 1.7 (Robert et Vétois [12] : le cas des petites dimensions)**.** *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte, lisse, sans bord, de dimension $n \in \{3, 4, 5, 6\}$. Soit h une fonction de classe C^1 sur M telle que l'opérateur $\Delta_g + h$ est coercif. Posons $p_\varepsilon = 2^* - \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$.*

Supposons qu'il existe une solution strictement positive non dégénérée u_0 de l'équation (0.1). *Dans le cas où $n = 6$, supposons de plus que*

$$h(x) > h_g(x) - 2u_0(x) \qquad \forall x \in M. \tag{1.23}$$

Alors pour $\varepsilon > 0$ petit, il existe une famille de solutions changeant de signe $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ de l'équation (1.2) *de la forme*

$$u_\varepsilon = u_0 - \left(\frac{\sqrt{n(n-2)}\mu_\varepsilon}{\mu_\varepsilon^2 + d_g(\xi_\varepsilon, \cdot)^2}\right)^{\frac{n-2}{2}} + \phi_\varepsilon\,, \tag{1.24}$$

où $(\mu_\varepsilon)_\varepsilon$, $(\xi_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(\phi_\varepsilon)_\varepsilon$ sont comme dans (1.6).

Contrairement aux théorèmes 1.5 et 1.6, nous ne supposons pas dans le théorème 1.7 que la fonction potentielle h satisfait l'inégalité (1.18). Ce résultat contraste avec la situation pour les solutions positives de l'équation (1.2). En effet, d'après les résultats que nous avons mentionné au début de la section 1.3.1 (cf. Druet [67], Khuri, Marques et Schoen [97], Li et Zhang [99, 100], Li et Zhu [101] et Marques [111]), les solutions positives de l'équation (1.2) sont uniformément bornées dans $C^0(M)$ lorsque l'inégalité (1.18) n'est pas satisfaite, du moins en petites dimensions dans le cas d'égalité.

La restriction aux dimensions $n \in \{3, 4, 5, 6\}$ dans le théorème 1.7 est également optimale puisque nous avons la compacité des familles de solutions changeant de signe bornées dans $H^1(M)$ de l'équation (1.2) lorsque $n \geq 7$, (1.8) est satisfaite et (M, g) est localement conformément plate (cf. Vétois [4]).

Dans le cas où $h \equiv h_g$, nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 1.8 (Robert et Vétois [12] : le cas du laplacien conforme)**.** *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte, lisse, sans bord, de dimension $n \geq 3$ telle que le laplacien conforme $\Delta_g + h_g$ est coercif. Posons $h \equiv h_g$ et $p_\varepsilon = 2^* - \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. Supposons que nous sommes dans l'un des deux cas suivants :*

(i) soit (M, g) est localement conformément plate et $n \geq 3$,

(ii) soit (M, g) est non localement conformément plate et $3 \leq n \leq 9$.

Supposons de plus qu'il existe une solution strictement positive non dégénérée u_0 de l'équation (0.1). *Alors pour $\varepsilon > 0$ petit, il existe une famille de solutions changeant de signe $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ de l'équation* (1.2) *de la forme* (1.23).

Ici encore, le théorème 1.8 contraste avec les résultats de compacité pour les solutions positives de l'équation de Yamabe en petites dimensions.

La restriction aux dimensions $n \leq 9$ dans le cas *(ii)* du théorème 1.8 est due à la géométrie de la variété. Nous pouvons étendre le résultat à la dimension $n = 10$ en faisant l'hypothèse supplémentaire que

$$u_0 > \frac{5}{567} |\operatorname{Weyl}_g|_g^2$$

(cf. Robert et Vétois [12, théorème 2.1]) et aux dimensions $n \geq 11$ en supposant que $\operatorname{Weyl}_g \equiv 0$, c'est-à-dire dans le cas *(i)*.

1.3.2.3. *Le cas d'une solution dégénérée*

Nous considérons à présent le cas oú la solution u_0 dans les théorèmes 1.7 et 1.8 est dégénérée, c'est à dire le cas où le sous-espace

$$K_0 = \left\{ \varphi \in C^2(M) : \varphi \text{ solution de } (1.21) \right\} \tag{1.25}$$

est non trivial. Comme nous l'avons dit dans la section précédente, il est nécessaire dans ce cas de faire une hypothèse qui exclut au moins le cas de l'équation de Yamabe sur la sphère standard puisque les résultats des théorèmes 1.7 et 1.8 ne sont pas vrais dans ce cas.

La difficulté majeure dans le cas où la solution u_0 est dégénérée est que nous avons en général très peu d'information sur le sous-espace K_0, hormis le fait qu'il est de dimension finie, et cependant nous devons inévitablement tenir compte de ce sous-espace dans nos constructions de solutions.

Une hypothèse standard et naturelle pour ce type de construction (cf. Ambrosetti et Malchiodi [30, chapitre 2]) est de supposer l'existence d'une variété $\mathcal{V} \subset H^1(M)$ de dimension finie telle que $u_0 \in \mathcal{V}$ et telle que les conditions suivantes sont satisfaites :

(i) toute fonction $v \in \mathcal{V}$ est une solution de l'équation (0.1),

(ii) l'espace tangent de $\mathcal{V}$ en u_0 est exactement égal au noyau de la hessienne de la fonctionnelle $J_0 : H^1(M) \to]0, \infty[$ définie par

$$J_0(u) = \frac{1}{2} \int_M \left(|\nabla u|_g^2 + hu^2 \right) dv_g - \frac{1}{2^*} \int_M |u|^{2^*} dv_g \qquad \forall u \in H^1(M).$$

Suivant la terminologie d'Ambrosetti et Malchiodi [30], nous disons qu'une variété $\mathcal{V} \subset H^1(M)$ de dimension finie qui satisfait les conditions (i) et (ii) est une *variété critique non dégénérée.*

Cette hypothèse d'existence d'une variété critique non dégénérée est satisfaite pour les solutions positives de l'équation (1.3) (cf. Bianchi et Egnell [36] et Rey [128]), ou de manière équivalente par projection stéréographique pour les solutions positives de l'équation de Yamabe sur la sphère standard. Nous savons également d'après le travail récent de Musso et Wei [117] que cette hypothèse est également satisfaite pour certaines solutions changeant de signe de l'équation de Yamabe sur la sphère standard.

Cependant l'existence d'une variété critique non dégénérée n'est pas vraie en général. Par exemple, nous pouvons démontrer (cf. Robert et

Vétois [15, proposition 7.3]) qu'étant donnés $d \in \{1, \dots, n-1\}$ et une variété riemannienne (N, g_N) compacte, lisse, sans bord, de dimension $n-d$, si nous posons

$$h \equiv \frac{4d}{n-2}, \quad u_0 \equiv \left(\frac{4d}{n-2}\right)^{\frac{n-2}{4}} \quad \text{et} \quad M = \mathbb{S}^d(r) \times N, \tag{1.26}$$

où M est munie de la métrique produit standard, alors pour r suffisamment grand, il existe une constante $\delta_r > 0$ telle que u_0 est à la fois une solution dégénérée et l'unique solution de l'équation (0.1) dans la boule de centre u_0 et de rayon δ_r pour la norme H^1. Il s'ensuit qu'il n'existe pas dans ce cas de variété critique non dégénérée qui contient la solution u_0.

Afin de traiter des cas tels que l'exemple (1.26), nous introduisons la notion suivante : une solution u_0 de l'équation (0.1) est appelée un *minimiseur strict local* de la fonctionnelle $I_0 : H^1(M) \to]0, \infty[$ définie par

$$I_0(u) = \frac{\int_M \left(|\nabla u|_g^2 + hu^2\right) dv_g}{\left(\int_M |u|^{2^*} dv_g\right)^{2/2^*}} \qquad \forall u \in H^1(M)$$

s'il existe une constante $\delta > 0$ telle que

$$\forall u \in H^1(M) \backslash \mathbb{R}u_0 \quad \|u - u_0\|_{H^1(M)} \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad I_0(u) > I_0(u_0),$$

où $\mathbb{R}u_0 = \{\lambda u_0 \,;\, \lambda \in \mathbb{R}\}$. Nous pouvons démontrer (cf. Robert et Vétois [15, proposition 7.3]) que la solution u_0 dans l'exemple (1.26) est un minimiseur strict local de la fonctionnelle I_0.

Nous obtenons le résultat suivant qui généralise les constructions des théorèmes 1.7 et 1.8 dans le cas où u_0 est un minimiseur strict local de la fonctionnelle I_0 :

Théorème 1.9 (Robert et Vétois [15]). *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte, lisse, sans bord, de dimension $n \geq 3$. Soit h une fonction de classe C^1 sur M telle que l'opérateur $\Delta_g + h$ est coercif. Posons $p_\varepsilon = 2^* - \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. Supposons qu'il existe une solution strictement positive u_0 de l'équation (0.1) telle que u_0 est un minimiseur strict local de la fonctionnelle I_0. Supposons de plus que nous sommes dans l'un des quatre cas suivants :*

(i) soit $n \in \{3, 4, 5\}$ et h est arbitraire,

(ii) soit $n = 6$ et h satisfait l'inégalité (1.23),

(iii) soit $h \equiv h_g$, (M, g) est localement conformément plate et $n \geq 3$.

(iv) soit $h \equiv h_g$, (M, g) est non localement conformément plate et $3 \leq n \leq 9$.

Alors pour $\varepsilon > 0$ petit, il existe une famille de solutions changeant de signe $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ de l'équation (1.2) de la forme (1.24).

La démonstration du théorème 1.9 s'appuie en premier lieu sur la construction d'une variété analytique $\mathcal{V} \subset H^1(M)$ de dimension finie de solutions approchées de l'équation (0.1), paramétrée localement par le sous-espace K_0 défini en (1.25). Plus précisemment, la variété $\mathcal{V}$ est construite de telle sorte que $u_0 \in \mathcal{V}$ et que toute fonction $v \in \mathcal{V}$ résout l'équation (0.1) dans l'orthogonal de K_0, dans le sens où

$$\Pi_{K_0^\perp}\big(v - (\Delta_g + h)^{-1}\left(|v|^{2^*-2} v\right)\big) = 0\,,$$

où $K_0^\perp$ est l'orthogonal de K_0 dans $H^1(M)$ et $\Pi_{K_0^\perp}$ est la projection orthogonale de $H^1(M)$ sur $K_0^\perp$ pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_h$ défini par

$$\langle u, v\rangle_h = \int_M \big(\langle \nabla u, \nabla v\rangle_g + huv\big) dv_g \qquad \forall u, v \in H^1(M)\,.$$

Notons que les propriétés satisfaites par la variété $\mathcal{V}$ sont plus faibles que la condition (i) dans la définition d'une variété critique non dégénérée, ce qui nous permet de traiter des cas tels que l'exemple (1.26). Le reste de la démonstration s'appuie sur des arguments d'analicité et sur un théorème de construction général que nous démontrons séparément dans [13] en collaboration avec Frédéric Robert.

Nous renvoyons également aux travaux de Byeon et Jeanjean [42], Dancer [53, 54], del Pino et Felmer [57] et Jeanjean et Tanaka [92] pour des approches différentes qui s'appuient sur des arguments topologiques pour ce type de problèmes de dégénérescence.

2. Systèmes elliptiques

Dans cette partie, nous présentons nos travaux sur la stabilité des solutions de systèmes d'équations elliptiques critiques [7, 8] en collaboration avec Olivier Druet et Emmanuel Hebey. Les systèmes d'équations que nous considérons sont posés, comme les équations scalaires de la première partie, sur une variété riemannienne (M, g) compacte, lisse, sans bord, de dimension $n \geq 3$.

Nous présentons nos résultats pour les systèmes d'équations de Schrödinger fortement couplés dans la section 2.1 et nos résultats pour le systèmes de Klein–Gordon–Maxwell–Proca dans la section 2.2.

2.1. Systèmes d'équations de Schrödinger couplées.

Soit p un entier supérieur où égal à 1 et $M_p^s(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées symétriques de taille p à coefficients réels. Nous nous intéressons dans cette section à des systèmes d'équations elliptiques critiques de la forme

$$\Delta_g^p \mathcal{U} + \mathcal{A}\mathcal{U} = |\mathcal{U}|^{2^*-2} \mathcal{U} \quad \text{sur } M, \tag{2.1}$$

où $\mathcal{A}$ est une fonction de classe C^1 sur M à valeurs dans $M_p^s(\mathbb{R})$, $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_p) : M \to \mathbb{R}^p$ est la fonction vectorielle inconnue et

$$|\mathcal{U}| = \Big(\sum_{i=1}^{p} |u_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

En coordonnées, le système (2.1) s'écrit

$$\Delta_g u_i + \sum_{j=1}^{p} \mathcal{A}_{ij} u_j = \Big(\sum_{j=1}^{p} |u_j|^2\Big)^{\frac{2}{n-2}} u_i \quad \text{sur } M \tag{2.2}$$

pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, où $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_{ij})_{1 \le i,j \le p}$. Ces systèmes sont dits *fortement couplés* du au couplage à la fois dans la partie potentielle et dans la partie non linéaire. Des systèmes d'équations de Schrödinger fortement couplés apparaissent dans la théorie de Hartree–Fock pour les doubles condensats de Bose–Einstein (cf. Burke, Bohn, Esry et Greene [41]) et dans l'étude des solitons incohérents en optique non linéaire (cf. Akhmediev et Ankiewicz [27], Christodoulides, Coskum, Mitchell et Segev [47], Hioe [88], Hioe et Salter [89] et Kanna et Lakshmanan [94]). Il existe également des systèmes d'équations de type Schrödinger avec des structures de couplage différentes qui ont été étudiés, tels que par exemple les systèmes de Schrödinger–Poisson (cf. les articles récents de Hebey et Wei [87], Kavian et Mischler [96] et Thizy [144–146]), les systèmes d'équations de Schrödinger avec couplage uniquement dans la partie potentielle (cf. Druet et Hebey [70] et Hebey [81–83]) ou encore des systèmes de Schrödinger fortement couplés avec des puissances mixtes ou différentes constantes de couplage dans la partie non linéaire (cf. Chen et Lin [45], Liu et Ma [108], Quittner et Souplet [127] et Wei et Weth [154]). Il est bien entendu que cette liste ne prétend à aucune exhaustivité.

Comme dans le cas des équations scalaires, la théorie de la régularité elliptique nous donne que les solutions du système (2.1)–(2.2) sont de classe $C^{2,\theta}$ pour tout $\theta \in \,]0,1[$. Nous disons qu'une solution $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_p)$ du système (2.1)–(2.2) est une *solution positive* si $u_i(x) \ge 0$ pour tout $x \in M$ et $i \in \{1, \dots, p\}$. Nous disons que la fonction $-\mathcal{A}$ est *coopérative* si tous les coefficients non diagonaux de $\mathcal{A}$ sont négatifs, i.e. $\mathcal{A}_{ij}(x) \le 0$ pour tout $x \in M$ et $i, j \in \{1, \dots, p\}$ tels que $i \ne j$. Nous disons que l'opérateur $\Delta_g^p + \mathcal{A}$ est *coercif* s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\int_M \Big(\sum_{i=1}^{p} |\nabla u_i|_g^2 + \sum_{i,j=1}^{p} \mathcal{A}_{ij} u_i u_j\Big) dv_g \ge C \sum_{i=1}^{p} \|u_i\|_{H^1(M)}^2 \ \forall \mathcal{U} \in \big(H^1(M)\big)^p.$$

Dans ce qui suit, nous nous intéressons à la stabilité et à l'existence de bornes a priori pour les solutions positives du système (2.1)–(2.2) sous l'effet de perturbations de la fonction $\mathcal{A}$. Nous disons que le système

(2.1)–(2.2) est *borné et stable* s'il existe des constantes C et δ telles que pour toute fonction $\mathcal{A}' \in C^1\left(M, M_p^s(\mathbb{R})\right)$ telle que

$$\sum_{i,j=1}^{p} \left\|\mathcal{A}'_{ij} - \mathcal{A}'_{ij}\right\|_{C^1(M)} < \delta$$

et pour toute solution positive $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_p)$ du système

$$\Delta_g^p \mathcal{U} + \mathcal{A}' \mathcal{U} = |\mathcal{U}|^{2^*-2} \mathcal{U} \quad \text{sur } M,$$

nous avons

$$\sum_{i=1}^{p} \|u_i\|_{C^0(M)} < C.$$

En particulier, si le système (2.1)–(2.2) est borné et stable, alors pour toute famille de fonctions $(\mathcal{A}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ qui converge vers $\mathcal{A}$ dans $C^1(M)$ lorsque $\varepsilon \to 0$, toute famille de solutions positive $(\mathcal{U}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ du système

$$\Delta_g^p \mathcal{U}_\varepsilon + \mathcal{A}'_\varepsilon \mathcal{U}_\varepsilon = |\mathcal{U}_\varepsilon|^{2^*-2} \mathcal{U}_\varepsilon \quad \text{sur } M,$$

est uniformément bornée dans $C^0(M)$ et donc dans $C^{2,\theta}(M)$ pour tout $\theta \in]0,1[$ par des estimations elliptiques classiques (cf. Gilbarg et Trudinger [79]). Il s'ensuit que $(\mathcal{U}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge à sous-suite près dans $C^2(M)$ vers une solution $\mathcal{U}_0$ du système (2.1)–(2.2).

Différentes notions de stabilité pour des systèmes d'équations elliptiques critiques ont été étudiées par Druet et Hebey [70, 71] et Hebey [81–83]. En particulier, en ce qui concerne le système (2.1)–(2.2), nous renvoyons au travail de Druet et Hebey [71] pour des résultats de stabilité pour les familles de solutions bornées dans $H^1(M)$.

Pour notre part, nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 2.1 (Druet, Hebey et Vétois [7]). *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte, lisse, sans bord, de dimension $n \geq 3$. Soit p un entier supérieur où égal à 1 et $\mathcal{A} \in C^1\left(M, M_p^s(\mathbb{R})\right)$ une fonction telle que*

$$\mathcal{A}(x) < \frac{n-2}{4(n-1)} \operatorname{Scal}_g(x) \operatorname{Id}_p \qquad \forall x \in M \tag{2.3}$$

au sens des formes bilinéaires. Dans le cas où $n = 3$, nous supposons de plus que l'opérateur $\Delta_g^p + \mathcal{A}$ est coercif et la fonction $-\mathcal{A}$ est coopérative. Alors le système (2.1)–(2.2) *est stable et borné.*

Le théorème 2.1 généralise les résultats obtenus dans le cas où $p = 1$ par Li et Zhu [101] en dimension $n = 3$ et Druet [67] en dimension $n \geq 4$. Nous renvoyons à la première partie de ce mémoire au sujet de l'optimalité de la condition (2.3) dans le cas où $p = 1$ (cf. par exemple les solutions (1.7) de l'équation de Yamabe sur la sphère standard, le théorème 1.1 dans la section 1.2.2 et les résultats de Brendle [37], Brendle et Marques [38], Chen, Wei, et Yan [46], Druet et Hebey [68] et Hebey et Wei [87] mentionnés dans la section 1.2.1).

La démonstration du théorème 2.1 s'appuie en premier lieu sur la classification complète des solutions positives du système limite associé au système (2.1)–(2.2), à savoir

$$\Delta_{\delta_0}^p \mathcal{U} = |\mathcal{U}|^{2^*-2}\mathcal{U} \quad \text{sur } \mathbb{R}^n, \tag{2.4}$$

où δ_0 est la métrique euclidienne. Par la méthode dite des « moving spheres », nous obtenons que l'ensemble des solutions du système (2.4) est constitué des fonctions $\mathcal{U}_{\mu,\xi,\Lambda}$ définies par

$$\mathcal{U}_{\mu,\xi,\Lambda}(x) = \left(\frac{\sqrt{n(n-2)}\mu}{\mu^2 + |x-\xi|^2}\right)^{\frac{n-2}{2}} \Lambda \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

où $\mu > 0$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ et $\Lambda \in \mathbb{S}^p$. Ce résultat généralise au cas des systèmes le résultat de Caffarelli, Gidas et Spruck [43] que nous avons mentionné dans la section 1.1. La démonstration du théorème 2.1 s'appuie ensuite sur une analyse ponctuelle des phénomènes de concentration pour le système (2.1)–(2.2) et sur une obstruction de type Pohožaev [123] dans le cas oũ la condition (2.3) est satisfaite. Des difficultés supplémentaires apparaissent dans le cas de la dimension $n = 3$. Il est nécessaire dans ce cas d'obtenir une description ponctuelle précise de la fonction de Green de l'opérateur $\Delta_g^p + \mathcal{A}$, ce qui passe en particulier par l'obtention d'une version vectorielle du théorème de la masse positive de Schoen et Yau [136].

2.2. Systèmes de Klein–Gordon–Maxwell–Proca.

Nous nous intéressons à présent dans cette section au système elliptique suivant, dit de Klein–Gordon–Maxwell–Proca

$$\begin{cases} \Delta_g u + m_0^2 u = u^3 + \omega^2 (qv-1)^2 u \\ \Delta_g v + \left(m_1^2 + q^2u^2\right) v = qu^2 \end{cases} \quad \text{sur } M, \tag{2.5}$$

où $m_0, m_1, q > 0$ sont des constantes, $\omega \in \mathbb{R}$, et u et v sont des fonctions inconnues sur M.

Le système (2.5) est satisfait par les ondes stationnaire du système complet de Klein–Gordon–Maxwell–Proca, un système de quatre équations d'évolution qui modélise l'interaction entre un champ de matière et le champ électromagnétique qu'il engendre. Les constantes m_0 et m_1 dans le système (2.5) jouent respectivement les rôles de la masse de la particule et de la masse de Proca, la constante q est la charge électrique de la particule et le nombre ω est la phase de l'onde stationnaire. Le formalisme de Proca repose sur l'hypothèse que la constante m_1 est strictement positive. Notons que si au contraire la constante m_1 est nulle, alors nous avons que $v \equiv 1/q$ et le système (2.5) se ramène à une équation de Schrödinger stationnaire.

Nous supposons ici que $n = 4$, ce qui correspond au cas où la partie non linéaire du système (2.5) est critique ($2^* - 1 = 3$). Le système

(2.5) a été étudié par Druet et Hebey [72] et Hebey et Wei [87] en dimension $n = 3$ et par Hebey et Truong [85] en dimension $n = 4$. Mentionnons également le travail de Thizy [143] en dimension $n \geq 3$ pour une classe générale de systèmes qui inclut le système (2.5) dans le cas où $n \in \{3, 4\}$.

Dans ce qui suit, nous nous intéressons à la question de la stabilité des familles de solutions positives bornées dans $H^1(M)$ sous l'effet de perturbations de la phase ω. Afin que le système (2.5) soit coercif, nous supposons que

$$-m_0 < \omega < m_0.$$

Nous disons que $\omega \in \left]-m_0, m_0\right[$ est une *phase stable* pour le système (2.5) si pour toute suite de nombre réels $(\omega_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}}$ qui converge vers ω, toute suite de solutions positives $(u_\alpha, v_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}}$ bornée dans $H^1(M)$ du système

$$\begin{cases} \Delta_g u_\alpha + m_0^2 u_\alpha = u_\alpha^3 + \omega_\alpha^2 (q v_\alpha - 1)^2 u_\alpha \\ \Delta_g v_\alpha + \left(m_1^2 + q^2 u_\alpha^2\right) v_\alpha = q u_\alpha^2 \end{cases} \quad \text{sur } M,$$

converge à sous-suite près dans $C^2(M)$ vers un couple de solutions positives du système (2.5). Dans le cas contraire, nous disons que ω est une *phase instable*.

En dimension $n = 4$, Hebey et Truong [85] ont obtenu des bornes a priori sur les solutions positives du système (2.5) en faisant l'hypothèse que

$$m_0^2 - \omega^2 < \frac{1}{6} \operatorname{Scal}_g(x) \qquad \forall x \in M. \tag{2.6}$$

Ce résultat implique en particulier que la propriété de stabilité des phases est vraie sous l'hypothèse (2.6). Cette hypothèse est optimale pour l'existence de bornes a priori. En revanche, elle n'est pas optimale pour la propriété de stabilité des phases. Dans les théorèmes 2.2 et 2.3 ci-après, nous démontrons que la propriété de stabilité des phases est vraie lorsque l'inégalité inverse de (2.6) est satisfaite et qu'elle n'est pas vraie dans le cas d'égalité pour la sphère standard.

Notre premier résultat concernant les systèmes de Klein–Gordon–Maxwell–Proca est le suivant :

Théorème 2.2 (Druet, Hebey et Vétois [8])**.** *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte, lisse, sans bord, de dimension $n = 4$. Soient $m_0, m_1, q > 0$ des constantes. Tout nombre $\omega \in \left]-m_0, m_0\right[$ tel que*

$$m_0^2 - \omega^2 > \frac{1}{6} \operatorname{Scal}_g(x) \qquad \forall x \in M \tag{2.7}$$

est une phase stable pour le système (2.5).

Nous obtenons également le résultat suivant :

Théorème 2.3 (Druet, Hebey et Vétois [8]). *Dans le cas où* (M, g) *est la sphère standard de dimension* $n = 4$*, les nombres* $\omega \in \mathbb{R}$ *tels que*

$$m_0^2 - \omega^2 = 2 \quad \left(\equiv \frac{1}{6} \operatorname{Scal}_g\right)$$

sont des phases instables pour le système (2.5).

Le théorème 2.2 complète le résultat d'Hebey et Truong [85] en ce qui concerne la stabilité des phases et le théorème 2.3 démontre l'optimalité des conditions (2.6) et (2.7) dans le cas de la sphère standard.

La démonstration du théorème 2.2 s'appuie sur une analyse fine dans C^0 des phénomènes de concentration pour le système (2.5). L'une des difficultés principales ici provient du fait que l'on ne dispose a priori que d'un contrôle dans $H^1(M) \cap L^\infty(M)$ pour les fonctions potentielles dans la première équation du système (2.5), c'est-à-dire pour les fonctions h_α définies par

$$h_\alpha = m_0^2 - \omega_\alpha^2 (q v_\alpha - 1)^2$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$. Ce contrôle, trop faible pour conclure dans le cas d'une équation scalaire, nous oblige à développer des arguments d'analyse spécifiques pour ce type de système. La démonstration du théorème 2.3 s'appuie quant à elle sur une méthode de réduction à un problème de dimension finie en utilisant les solutions positives de l'équation de Yamabe comme modèle pour la première équation.

3. Équations dégénérées et anisotropes

Dans cette partie, nous considérons des équations quasi-linéaires de la forme

$$-\operatorname{div}(A(\nabla u)) = f(x, u) \qquad \text{sur } \Omega, \tag{3.1}$$

où Ω est un domaine de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, A est un champ de vecteur non linéaire sur $\mathbb{R}^n$, $\operatorname{div}(X_1, \ldots, X_n) = \partial_{x_1} X_1 + \cdots + \partial_{x_n} X_n$ et f est une fonction sur $\Omega \times \mathbb{R}$ telle que

$$f(x, u) \sim \lambda |u|^{p^*-2} u$$

uniformément par rapport à $x \in \Omega$ lorsque $u \to \infty$, où $\lambda > 0$ est une constante et $p^* > 1$ est un exposant critique pour les injections dans les espaces de Lebesgue de l'espace de Sobolev associé à l'opérateur $-\operatorname{div}(A(\nabla \cdot))$. La valeur de l'exposant p^* dépend du modèle choisi pour le champ de vecteur A. Cette valeur est précisée ci-après pour chacun des deux modèles que nous considérons.

Les équations quasi-linéaires du type (3.1) interviennent dans diverses branches des sciences appliquées. L'idée qui est derrière ces équations est d'obtenir des modèles plus réalistes en s'appuyant sur des opérateurs non linéaires. Parmi les champs d'application de ces équations, mentionnons notamment les modèles de dynamique des fluides non newtonniens ou des fluides en milieux poreux, les modèles de dynamique de population et les modèles de réaction-diffusion. Nous renvoyons aux livres d'Antontsev, Díaz et Shmarëv [32] et Díaz [62] et aux références qui sont contenues dans ces livres au sujet de ces applications ainsi que des aspects plus théoriques de ce type d'équation.

Nous considérons dans ce mémoire les deux modèles suivants qui font l'objet d'une attention particulière dans la littérature (cf. les premières sections du livre d'Antontsev, Díaz et Shmarëv [32]) :

- *Le p–laplacien* :
$$\Delta_p u = -\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right), \tag{3.2}$$
où $p > 1$. Dans ce cas, l'énergie associée est
$$E_p(\Omega) = \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx$$
et l'exposant critique est
$$p^* = \frac{np}{n-p} \qquad \text{si } p < n.$$
- *Le laplacien anisotrope* :
$$\Delta_{\overrightarrow{p}} u = -\sum_{i=1}^n \partial_{x_i}\left(|\partial_{x_i} u|^{p_i-2}\partial_{x_i} u\right), \tag{3.3}$$
où $\overrightarrow{p} = (p_1, \dots, p_n) \in \left]1, \infty\right[^n$. Dans ce cas, l'énergie associée est
$$E_{\overrightarrow{p}}(u) = \sum_{i=1}^n \int_\Omega |\partial_{x_i} u|^{p_i} \, dx$$
et l'exposant critique est (cf. Fragalà, Gazzola et Kawohl [75, théorème 1])
$$p^* = \max\left(\frac{np}{n-p}, p_1, \dots, p_n\right) \quad \text{si } p < n, \tag{3.4}$$
où
$$\frac{1}{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}. \tag{3.5}$$

Nous consacrons la section 3.1 au cas isotrope modélisé par le p–laplacien. Nous y présentons des résultats d'estimation a priori et de classification des solutions. Nous examinons le cas du laplacien anisotrope dans la section 3.2. Pour cet opérateur, nous présentons des résultats d'estimation a priori et d'existence de solutions qui dévoilent en particulier la présence de phénomènes spécifiques au régime anisotrope tels que des phénomènes d'annulation des solutions sur une partie de $\mathbb{R}^n$ ou des phénomènes de concentration des solutions sur des ensembles de dimension non nulle.

3.1. **Le cas du p–laplacien.**

Dans cette section, nous nous intéressons aux équations critiques du type (3.1) dans le cas où $-\operatorname{div}(A(\nabla u))$ est l'opérateur p–laplacien défini en (3.2).

La connaissance des phénomènes de concentration pour le p–laplacien est beaucoup moins avancée que dans le cas des équations ou des systèmes elliptiques que nous avons présenté dans les deux premières parties de ce mémoire. Le résultat de décomposition de Struwe [140] que nous avons mentionné dans la section 1.1 a été généralisé dans divers contextes au cas du p–laplacien. Nous renvoyons à ce sujet aux travaux d'Alves [28] pour des équations posées sur l'espace euclidien tout entier, Mercuri et Willem [114] et Yan [157] pour des équations posées sur des domaines bornées de l'espace euclidien et Saintier [130] pour des équations posées sur des variétés riemanniennes compactes. Des estimations ponctuelles pour ce type d'équations ont également été obtenues par Saintier [130].

Comme dans le cas des équations et des systèmes elliptiques, il ressort des résultats mentionnés ci-avant qu'afin d'avoir une description précise des phénomènes de concentration dans le cas du p–laplacien, il est primordial d'avoir une connaissance des solutions de l'équation limite

$$\Delta_p u = \lambda\,|u|^{p^*-2}\,u \quad \text{sur } \mathbb{R}^n, \tag{3.6}$$

ou au moins du comportement asymptotique des solutions de cette équation. Ces phénomènes de concentration sont liés à la loi d'invariance de l'équation (3.6), à savoir : si u est une solution de l'équation (3.6), alors pour tout $\mu > 0$ et $\xi \in \mathbb{R}^n$, la fonction $u_{\mu,\xi}$ définie par

$$u_{\mu,\xi}(x) = \mu^{\frac{p-n}{p}}\,u\big(\mu^{-1}(x-\xi)\big) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

est solution de l'équation (3.6).

Nous présentons dans ce qui suit des estimations a priori pour les solutions avec ou sans condition de signe et un résultat de classification pour les solutions positives de l'équation (3.6) dans l'espace d'énergie associé à l'opérateur p–laplacien.

3.1.1. *Estimations a priori.*

Nous considérons en fait dans le théorème 3.1 une classe d'équation un peu plus générale que l'équation (3.6), à savoir

$$\Delta_p u = f(x,u) \quad \text{sur } \mathbb{R}^n, \tag{3.7}$$

où f est une fonction sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ telle qu'il existe une constante λ telle que

$$|f(x,s)| \le \lambda\,|s|^{p^*-1} \tag{3.8}$$

pour tout $s \in \mathbb{R}$ et pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$. En termes de régularité, nous faisons l'hypothèse usuelle que la fonction f est de *Caratheodory* sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, c'est-à-dire telle que $f(\cdot, s)$ est mesurable pour tout $s \in \mathbb{R}$ et $f(x, \cdot)$ est continue pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$.

L'espace d'énergie associé à l'équation (3.7) est l'espace $D^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ défini comme le complété de l'espace des fonctions lisses à support compact dans $\mathbb{R}^n$ pour la norme

$$\|u\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^n)} = \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\,.$$

Nous pouvons démontrer (cf. Peral [120, théorème E.0.20], Trudinger [151, théorème 3] et Vétois [20, lemme 2.1]) que les solutions (au sens faible) dans $D^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ de l'équation (3.7) sont uniformément bornées dans $\mathbb{R}^n$. Il s'ensuit d'après les travaux de DiBenedetto [63] et Tolksdorf [148] que ces solutions sont globalement Lipschitz et localement de classe $C^{1,\theta}$ dans $\mathbb{R}^n$ pour un certain $\theta \in \,]0, 1[$.

Nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 3.1 (Vétois [20])**.** *Soient $p \in \,]1, n[$, f une fonction de Caratheodory sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ qui satisfait* (3.8) *et u une solution dans $D^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ de l'équation* (3.7)*. Alors il existe une constante C_0 telle que*

$$|u(x)| \le C_0\big(1 + |x|^{\frac{n-p}{p-1}}\big)^{-1} \quad et \quad |\nabla u(x)| \le C_0\big(1 + |x|^{\frac{n-1}{p-1}}\big)^{-1} \tag{3.9}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Si de plus $u \ge 0$ dans $\mathbb{R}^n$ et

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x, u)\, dx > 0,$$

alors il existe une constante $C_1 > 0$ telle que

$$u(x) \ge C_1\big(1 + |x|^{\frac{n-p}{p-1}}\big)^{-1} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Nous renvoyons à Vétois [20] pour des précisions sur la dépendance des constantes C_0 et C_1 dans le théorème 3.1.

Dans le cas où $p = 2$, Jannelli et Solimini [91] ont obtenu l'estimation a priori (3.9) sous des hypothèses légèrement différentes des notres, mais qui incluent également le cas de l'équation (3.6). Leur approche utilise la fonction de Green du laplacien et s'appuie de manière importante sur la linéarité de l'opérateur et donc ne semble pas s'adapter au cas où $p \ne 2$.

La démonstration du théorème 3.1 s'appuie d'une part sur l'obtention d'une borne a priori dans une classe d'espaces de Lebesgue faibles pour les solutions de l'équation (3.7) et d'autre part sur une propriété de doublement (cf. Poláčik, Quittner et Souplet [124]) et des inégalités de type Harnack (cf. Serrin [139] et Trudinger [150]).

3.1.2. *Classification des solutions positives.*

Examinons à présent le cas des solutions positives de l'équation (3.6). Il a été démontré par Guedda et Véron [80] que l'ensemble des solutions positives de l'équation (3.6) qui sont radiales par rapport à un point $\xi \in \mathbb{R}^n$ est constitué des fonctions $U_{\lambda,\mu,\xi}$ définies par

$$U_{\lambda,\mu,\xi}(x) = \left(\frac{C_{n,p} \lambda^{-\frac{1}{p}} \mu^{\frac{1}{p-1}}}{\mu^{\frac{p}{p-1}} + |x-\xi|^{\frac{p}{p-1}}} \right)^{\frac{n-p}{p}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.10}$$

où $\mu \geq 0$ et

$$C_{n,p} = (n-p)^{\frac{p-1}{p}} (p-1)^{\frac{1-p}{p}} n^{\frac{1}{p}}. \tag{3.11}$$

Dans le cas où $p = 2$, Caffarelli, Gidas et Spruck [43] ont démontré en utilisant la méthode dite des « moving planes » que les fonctions (3.10) sont les seules solutions positives de l'équation (3.6). Plus récemment, Damascelli, Merchán, Montoro et Sciunzi [51] ont généralisé ce résultat au cas où $p \in [2n/(n+2), 2]$ pour les solution dans $D^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ de l'équation (3.6).

En combinant les estimations a priori du théorème 3.1 (cf. [20]) et un résultat de symétrie de Damascelli et Ramaswamy [52], nous avons pu généraliser le résultat de classification de Damascelli, Merchán, Montoro et Sciunzi [51] au cas où $p \in \,]1, 2]$. Ce résultat a récemment été généralisé à son tour par Sciunzi [138] pour tout $p \in \,]1, n[$. La démonstration de Sciunzi [138] fait appel aux estimations a priori du théorème 3.1 et s'appuie sur une estimation supplémentaire pour le gradient des solutions.

En combinant les résultats mentionnés ci-avant, nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 3.2 ([20,43,51,52,80,138])**.** *Pour tout $p \in \,]1, n[$, l'ensemble des solutions positives dans $D^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ de l'équation* (3.6) *est constitué des fonctions* (3.10).

3.2. **Le cas des équations anisotropes.**

Nous nous intéressons à présent aux équations critiques du type (3.1) dans le cas où $-\operatorname{div}(A(\nabla u))$ est l'opérateur laplacien anisotrope défini en (3.3). Nous supposons dans un premier temps que

$$p_+ = \max(p_1, \dots, p_n) < p^* = \frac{np}{n-p}, \tag{3.12}$$

où p est comme dans (3.5). Le cas d'égalité dans (3.12) fera l'objet de la section 3.2.2.

De même que dans le cas du p–laplacien, nous disposons d'un résultat de décomposition en somme de pics pour le laplacien anisotrope sur des domaines bornés de l'espace euclidien qui généralise le résultat de

Struwe [140] mentionné dans la section 1.1 (cf. El Hamidi et Vétois [1] et la thèse de doctorat de l'auteur). Ici encore, il ressort de ce résultat que les phénomènes de concentration sont caractérisés par les solutions de l'équation limite

$$\Delta_{\overrightarrow{p}} u = \lambda \left|u\right|^{p^*-2} u \quad \text{sur } \mathbb{R}^n \tag{3.13}$$

et par la loi d'invariance de l'équation (3.13), à savoir : si u est une solution de l'équation (3.13), alors pour tout $\mu > 0$ et $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, la fonction $u_{\mu,\xi}$ définie par

$$u_{\mu,\xi}\left(x\right) = \mu^{\frac{p-n}{p}} u\big(\tau^{\overrightarrow{p}}_{\mu,\xi}\left(x\right)\big), \tag{3.14}$$

où

$$\tau^{\overrightarrow{p}}_{\mu,\xi}\left(x\right) = \big(\mu^{\frac{n}{p}-\frac{n}{p_1}-1}\left(x_1-\xi_1\right), \dots, \mu^{\frac{n}{p}-\frac{n}{p_n}-1}\left(x_n-\xi_n\right)\big) \tag{3.15}$$

pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, est solution de l'équation (3.13). Avec l'hypothèse (3.12), nous avons que les exposants sur μ dans (3.14) sont négatifs.

Une motivation supplémentaire pour étudier les solutions de l'équation (3.13) est liée à l'étude des fonctions extrémales pour l'inégalité de Sobolev anisotrope

$$\left\|u\right\|^p_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \le C \sum_{i=1}^n \left\|\partial_{x_i} u\right\|^{p_i}_{L^{p_i}(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall u \in C^\infty_c\left(\mathbb{R}^n\right), \tag{3.16}$$

où C est une constante qui ne dépend que de n et de $\overrightarrow{p}$ et $C^\infty_c\left(\mathbb{R}^n\right)$ est l'ensemble des fonctions lisses à support compact dans $\mathbb{R}^n$. Nous renvoyons à Nikol′skiĭ [118], Troisi [149] et Trudinger [152] pour des références sur les inégalités de Sobolev anisotropes (voir également le travail plus récent de Cianchi [48] sur ce sujet). Sous l'hypothèse (3.12), il suit du travail d'El Hamidi et Rakotoson [74] (cf. Vétois [19, théorème 2.1]) qu'il existe des fonctions extrémales non triviales pour l'inégalité (3.16). Nous pouvons de plus démontrer qu'à un changement d'échelle près, ces fonctions extrémales sont des solutions positives de l'équation (3.13).

Dans le cas où $p_1 = \dots = p_n = p$, nous savons (cf. Aubin [33] et Talenti [142] pour $p = 2$ et Alvino, Ferone, Trombetti et Lions [29] et Cordero-Erausquin, Nazaret et Villani [50] pour $p \ne 2$) que les fonctions extrémales de l'inégalité (3.16) sont les fonctions $U_{a,b,\xi}$ définies par

$$U_{a,b,\xi}\left(x\right) = \Big(a + b \sum_{i=1}^n \left|x_i - \xi_i\right|^{\frac{p}{p-1}}\Big)^{\frac{p-n}{p}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

où $a, b > 0$ et $\xi \in \mathbb{R}^n$. En revanche, dans le régime anisotrope, c'est-à-dire dans le cas où les exposants $p_1, \dots, p_n$ ne sont pas tous égaux, nous n'avons pas en général de formule explicite pour les solutions positives de l'équation (3.13).

Nous présentons dans la section 3.2.1 des estimations a priori pour les solutions dans l'espace d'énergie d'une classe d'équations qui inclut l'équation (3.13). Nous consacrons la section 3.2.2 à l'étude du cas d'égalité dans (3.12), où apparaît un phénomène de concentration des solutions sur des ensembles de dimension non nulle.

3.2.1. *Estimations a priori et phénomène d'annulation.*

Nous considérons dans cette section les équations de la forme

$$\Delta_{\overrightarrow{p}} u = f\left(x, u\right) \quad \text{sur } \mathbb{R}^n, \tag{3.17}$$

où f est une fonction de Caratheodory sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ telle qu'il existe une constante λ telle que

$$\left|f\left(x, s\right)\right| \leq \lambda \left|s\right|^{p^*-1} \tag{3.18}$$

pour tout $s \in \mathbb{R}$ et pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$.

L'espace d'énergie associé à l'équation (3.17) est l'espace $D^{1,\overrightarrow{p}}\left(\mathbb{R}^n\right)$ défini comme le complété de l'espace des fonctions lisses à support compact dans $\mathbb{R}^n$ pour la norme

$$\left\|u\right\|_{D^{1,\overrightarrow{p}}\left(\mathbb{R}^n\right)} = \sum_{i=1}^{n} \left\|\partial_{x_i} u\right\|_{L^{p_i}\left(\mathbb{R}^n\right)} .$$

En ce qui concerne la régularité des solutions dans $D^{1,\overrightarrow{p}}\left(\mathbb{R}^n\right)$ de l'équation (3.17), nous pouvons tout d'abord adapter les arguments utilisés dans le cas du p–laplacien pour démontrer que les solutions dans $D^{1,\overrightarrow{p}}\left(\mathbb{R}^n\right)$ de l'équation (3.7) sont uniformément bornées dans $\mathbb{R}^n$ (cf. El Hamidi et Rakotoson [74, propositions 1 et 2], Fragalà, Gazzola et Kawohl [75, théorème 2] et Vétois [19, lemme 3.1]). Il s'ensuit d'après les travaux de Lieberman [102, 103] que ces solutions sont globalement Lipschitz dans $\mathbb{R}^n$.

Nous présentons dans les théorèmes 3.3, 3.4 et 3.5 ci-après différents résultats sur le comportement asymptotique des solutions de l'équation (3.17) dans $D^{1,\overrightarrow{p}}\left(\mathbb{R}^n\right)$ suivant les valeurs de p_+. Les théorèmes 3.3, 3.4 et 3.5 traitent respectivement les cas $p_+ < p_*$, $p_+ = p_*$ et $p_* < p_+ < p^*$, où p_* est l'exposant défini par

$$p_* = \frac{p\left(n-1\right)}{n-p} ,$$

où p est comme dans (3.5). Rappelons que suite au travail d'El Hamidi et Rakotoson [74] mentionné ci-avant, nous avons l'existence d'une solution positive non triviale dans $D^{1,\overrightarrow{p}}\left(\mathbb{R}^n\right)$ de l'équation (3.17) sous l'hypothèse (3.12), c'est-à-dire dans chacun des cas couverts par les théorèmes 3.3, 3.4 et 3.5.

Dans le cas où $p_+ < p_*$, nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 3.3 (Vétois [19] : le cas $p_+ < p_*$)**.** *Soient $p_1, \dots, p_n > 1$ tels que $p < n$ et $p_+ < p_*$, f une fonction de Caratheodory sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ qui satisfait* (3.18) *et u une solution dans $D^{1,\overrightarrow{p}}(\mathbb{R}^n)$ de l'équation* (3.17)*. Alors il existe une constante C_0 telle que*

$$|u(x)|^{p_*} + \sum_{i=1}^{n} |\partial_{x_i} u(x)|^{p_i} \le C_0 \left(1 + \sum_{i=1}^{n} |x_i|^{\frac{p_* p_i}{p_* - p_i}}\right)^{-1}$$

pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Le résultat suivant concerne le cas limite où $p_+ = p_*$:

Théorème 3.4 (Vétois [19] : le cas $p_+ = p_*$)**.** *Soient $p_1, \dots, p_n > 1$ tels que $p < n$ et $p_+ = p_*$, f une fonction de Caratheodory sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ qui satisfait* (3.18) *et u une solution dans $D^{1,\overrightarrow{p}}(\mathbb{R}^n)$ de l'équation* (3.17)*. Alors pour tout $q > p_*$, il existe une constante C_q telle que*

$$|u(x)|^{q} + \sum_{i=1}^{n} |\partial_{x_i} u(x)|^{p_i} \le C_q \left(1 + \sum_{i=1}^{n} |x_i|^{\frac{q p_i}{q - p_i}}\right)^{-1}$$

pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Enfin, dans le cas où $p_* < p_+ < p^*$, nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 3.5 (Vétois [19] : le cas $p_* < p_+ < p^*$)**.** *Soient $p_1, \dots, p_n > 1$ tels que $p < n$ et $p_* < p_+ < p^*$, f une fonction de Caratheodory sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ qui satisfait* (3.18) *et u une solution dans $D^{1,\overrightarrow{p}}(\mathbb{R}^n)$ de l'équation* (3.17)*. Alors il existe un nombre $q_0 \in \,]p_*, p_+[$ tel que les propriétés suivantes sont satisfaites :*

(i) Il existe une constante R_0 telle que

$$u(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \sum_{i \in \mathcal{I}_0} |x_i| \ge R_0\,,$$

où $\mathcal{I}_0$ est l'ensemble des indices $i \in \{1, \dots, n\}$ tels que $p_i > q_0$ ($\mathcal{I}_0 \neq \emptyset$ puisque $q_0 < p_+$).

(ii) Pour tout $q > q_0$, il existe une constante C_q telle que

$$|u(x)|^{q} + \sum_{i=1}^{n} |\partial_{x_i} u(x)|^{p_i} \le C_q \left(1 + \sum_{i \in \mathcal{I}_0^c} |x_i|^{\frac{q p_i}{q - p_i}}\right)^{-1}$$

pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, où $\mathcal{I}_0^c = \{1, \dots, n\} \backslash \mathcal{I}_0$.

Nous renvoyons à Vétois [19] pour des précisions sur la dépendance des constantes C_0, C_q et R_0 dans les théorèmes 3.3, 3.4 et 3.5. Nous obtenons également dans [19] une borne supérieure pour le nombre q_0 dans le théorème 3.5, qui ne dépend que de n et de $\overrightarrow{p}$.

La propriété *(i)* du théorème 3.5 contraste avec la situation dans le cas où $p_1 = \ldots = p_n$. Dans ce cas, nous savons d'après le principe du maximum fort de Vázquez [153] que les solutions positives de l'équation

(3.17) sont soit identiquement nulles, soit strictement positives sur l'espace euclidien tout entier. En revanche, dans le régime anisotrope, le principe du maximum fort n'est plus vrai en général comme le montre en particulier le théorème 3.5. Nous pouvons cependant démontrer dans ce cas une version plus faible du résultat de Vázquez [153], à savoir que les solutions s'annulent nécessairement sur des sous-espace de l'espace euclidien (cf. Vétois [22]).

Les démonstration des théorèmes 3.3, 3.4 et 3.5 s'appuient dans une première partie sur des ingrédients similaires à ceux utilisés dans la démonstration du théorème 3.1, à savoir l'obtention d'une borne a priori dans une classe d'espaces de Lebesgue faibles pour les solutions de l'équation (3.7) et l'utilisation d'une propriété de doublement. La seconde partie de la démonstration s'appuie sur un schéma itératif de type Moser [115] qui se révèle beaucoup plus ardu que dans le cas isotrope où $p_1 = \ldots = p_n$. La difficulté dans le régime anisotrope provient de la non homogénéité de l'analogue anisotrope de l'inégalité de Hölder inverse. Cet obstacle est également apparu dans un travail précédent [21] en collaboration avec Florica Cîrstea sur les solutions fondamentales des équations anisotropes dans le cas où $p_+ < p_*$. L'idée pour surpasser cet obstacle est d'obtenir une borne supérieure sur l'ensemble des exposants qui apparaissent à chaque itération de l'inégalité de Hölder inverse et de démontrer que cette borne supérieure passe en dessous d'une certaine valeur critique à partir d'un certain nombre d'itérations.

3.2.2. *Phénomène de concentration dans des directions partielles.*

Dans cette section, nous nous intéressons au cas limite où

$$p_+ = p^* = \frac{np}{n-p}\,, \tag{3.19}$$

où p est comme dans (3.5). Nous pouvons supposer sans perdre de généralité qu'il existe $n_-, n_+ \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $n_- + n_+ = n$ et

$$p_i < p^* \quad \Longleftrightarrow \quad i \in \{1, \ldots, n_-\}\,.$$

Par un calcul sans difficulté, nous pouvons voir qu'il est nécessaire d'avoir $n_- \geq 2$ pour que l'hypothèse (3.19) soit satisfaite.

Une remarque importante dans ce cas est que les exposants sur μ dans (3.15) s'annulent pour les directions $i \in \{n_- + 1, \ldots, n\}$. il s'ensuit que ces directions ne sont pas affectées par les phénomènes de concentration. Nous pouvons toujours démontrer dans ce cas un résultat de décomposition du type de celui de Struwe [140], mais à la différence importante que les pics de solutions ne se concentrent pas sur des points, mais sur des ensembles de dimension n_+.

Nous présentons notre résultat de décomposition dans le théorème 3.6 ci-après. Pour ce résultat, nous considérons le problème

$$\begin{cases} -\Delta_{\overrightarrow{p}} u = \lambda_\alpha \left|u\right|^{r_\alpha - 2} u + h\left(\cdot, u\right) & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.20}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, $(\lambda_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombre réels strictement positifs qui converge vers un nombre $\lambda > 0$, $(r_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels dans l'intervalle $[p, p^*]$ qui converge vers p^* et h est une fonction de Caratheodory sur $\Omega \times \mathbb{R}$ à croissance sous-critique, c'est-à-dire telle qu'il existe des constantes $C > 0$ et $q \in \left]1, p^*\right[$ telles que

$$\left|h\left(x,s\right)\right| \le C\left(\left|s\right|^{q-1} + 1\right) \tag{3.21}$$

pour tout $s \in \mathbb{R}$ et pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$. L'espace d'énergie associé au problème (3.20) est l'espace $D^{1,\overrightarrow{p}}\left(\Omega\right)$ défini comme le complété de l'espace des fonctions lisses à support compact dans Ω pour la norme

$$\left\|u\right\|_{D^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)} = \sum_{i=1}^n \left\|\partial_{x_i} u\right\|_{L^{p_i}(\Omega)}.$$

Nous disons qu'une suite de fonctions $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}}$ dans $D^{1,\overrightarrow{p}}\left(\Omega\right)$ est une *suite de Palais–Smale* pour le problème (3.20) si

$$I_\alpha\left(u_\alpha\right) = \mathrm{O}\left(1\right) \quad \text{et} \quad DI_\alpha\left(u_\alpha\right) \to 0$$

lorsque $\alpha \to \infty$, où $I_\alpha : D^{1,\overrightarrow{p}}\left(\Omega\right) \to \mathbb{R}$ est la fonctionnelle définie par

$$I_\alpha\left(u\right) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}\int_\Omega \left|\partial_{x_i} u\right|^{p_i} dx - \int_\Omega \int_0^u h\left(\cdot, s\right) ds dx - \frac{\lambda_\alpha}{r_\alpha}\int_\Omega \left|u\right|^{r_\alpha} dx$$

pour toute fonction $u \in D^{1,\overrightarrow{p}}\left(\Omega\right)$. En particulier, nous avons que toute suite de solutions bornée dans $D^{1,\overrightarrow{p}}\left(\Omega\right)$ du problème (3.20) est une suite de Palais–Smale pour le problème (3.20). Nous renvoyons à Vétois [17] pour des exemples de suites de Palais–Smale bornées dans $D^{1,\overrightarrow{p}}\left(\Omega\right)$ pour le problème (3.20).

Un autre ingrédient dont nous avons besoin dans le théorème 3.6 est la notion de $\overrightarrow{p}$–stabilité asymptotique du domaine. Le domaine Ω est dit *asymptotiquement* $\overrightarrow{p}$*–stable* si pour toute suite $(\mu_\alpha)_\alpha$ de nombres réels strictement positifs qui converge vers 0 et pour toute suite $(\xi_\alpha)_\alpha$ de points de $\mathbb{R}^n$, les domaines $\Omega_\alpha = \tau^{\overrightarrow{p}}_{\mu_\alpha,\xi_\alpha}\left(\Omega\right)$, où $\tau^{\overrightarrow{p}}_{\mu_\alpha,\xi_\alpha}$ est comme dans (3.15), convergent à sous suite près lorsque $\alpha \to +\infty$ vers un domaine V de $\mathbb{R}^n$ tel que soit $V = \emptyset$, soit V satisfait la propriété du segment (cf. Adams et Fournier [26] pour la définition de la propriété du segment). La convergence des domaines Ω_α vers V est à comprendre dans le sens où les conditions suivantes sont satisfaites :

(i) Tout compact de V est inclus dans Ω_α pour α suffisamment grand.

(ii) Pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$, la mesure de Lebesgue de l'ensemble $K \cap \Omega_\alpha \backslash V$ tend vers 0 lorsque $\alpha \to +\infty$.

Nous disons dans ce cas que V est un *domaine limite* pour la suite $(\Omega_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}}$ et nous utilisons la notation $\Omega_\alpha \to V$. Cette notion de $\overrightarrow{p}$–stabilité asymptotique du domaine a été introduite et étudiée dans le cas $p_+ < p^*$ dans la thèse de doctorat de l'auteur (cf. El Hamidi et Vétois [1] et Vétois [6]). Nous pouvons démontrer que tout domaine borné et convexe de $\mathbb{R}^n$ est asymptotiquement $\overrightarrow{p}$–stable (cf. Vétois [19, théorème 3.2]). En revanche, contrairement au cas où $p_1 = \ldots = p_n$, il n'est en général pas suffisant que le domaine soit lisse pour qu'il soit asymptotiquement $\overrightarrow{p}$–stable. Nous renvoyons à la thèse de doctorat de l'auteur et aux articles de El Hamidi et Vétois [1] et Vétois [6, 17] pour des discussions plus étendues sur cette notion.

Sous cette hypothèse de $\overrightarrow{p}$–stabilité asymptotique du domaine, nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 3.6 (Vétois [17]). *Soient $p_1, \ldots, p_n > 1$ qui satisfont $p < n$ et (3.19), Ω un domaine borné asymptotiquement $\overrightarrow{p}$–stable de $\mathbb{R}^n$, $(\lambda_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre réels strictement positifs qui converge vers un nombre $\lambda > 0$, $(r_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels dans l'intervalle $]1, p^*]$ qui converge vers p^*, h une fonction de Caratheodory sur $\Omega \times \mathbb{R}$ qui satisfait (3.21) et $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}}$ une suite de Palais–Smale bornée dans $D^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$ pour le problème (3.20). Alors la suite $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}}$ se décompose à sous-suite près de la manière suivante :*

$$u_\alpha = u_\infty + \sum_{i=1}^{k} \overline{\lambda}_i \mu_{i,\alpha}^{\frac{p-n}{p}} U_i \circ \tau_{\mu_{i,\alpha},\xi_{i,\alpha}}^{\overrightarrow{p}} + \phi_\alpha \tag{3.22}$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, où $(\phi_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions sur Ω qui converge vers 0 dans $D^{1,\overrightarrow{p}}(V)$, u_∞ est une solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta_{\overrightarrow{p}} u_\infty = \lambda \left|u_\infty\right|^{p^*-2} u_\infty + h(\cdot, u_\infty) & \textit{sur } \Omega \\ u_\infty = 0 & \textit{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

$k \in \mathbb{N}$ et pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, $\overline{\lambda}_i \geq 1$, $(\mu_{i,\alpha})_{\alpha\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels strictement positifs qui converge vers 0, $(\xi_{i,\alpha})_{\alpha\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de Ω et U_i est une solution non triviale dans $D^{1,\overrightarrow{p}}(V_i)$ (prolongée par 0 en dehors du domaine V_i) du problème

$$\begin{cases} -\Delta_{\overrightarrow{p}} U_i = \lambda \left|U_i\right|^{p^*-2} U_i & \textit{sur } V_i \\ U_j = 0 & \textit{sur } \partial V_i, \end{cases} \tag{3.23}$$

où V_i est un domaine de $\mathbb{R}^n$ tel que $\tau_{\mu_{i,\alpha},\xi_{i,\alpha}}^{\overrightarrow{p}}(\Omega) \to V_i$ lorsque $\alpha \to \infty$. Si nous supposons de plus que les fonctions $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}}$ sont positives, alors les fonctions $U_1, \ldots, U_k$ sont également positives.

Nous obtenons également dans [17] la décomposition d'énergie qui est naturellement associée à la décomposition (3.22), à savoir

$$I_\alpha(u_\alpha) = I_\infty(u_\infty) + \sum_{i=1}^{k} E(U_j) + \mathrm{o}(1)$$

lorsque $\alpha \to \infty$, où $I_\infty : D^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega) \to \mathbb{R}$ est la fonctionnelle définie par

$$I_\infty(u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} \int_\Omega |\partial_{x_i} u|^{p_i} dx - \int_\Omega \int_0^u h(\cdot, s)\, ds dx - \frac{\lambda}{p^*} \int_\Omega |u|^{p^*} dx$$

pour toute fonction $u \in D^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$ et $E : D^{1,\overrightarrow{p}}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ est la fonctionnelle définie par

$$E(U) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} \int_{\mathbb{R}^n} |\partial_{x_i} U|^{p_i} dx - \frac{\lambda}{p^*} \int_{\mathbb{R}^n} |U|^{p^*} dx$$

pour toute fonction $U \in D^{1,\overrightarrow{p}}(\mathbb{R}^n)$.

Il est intéressant de remarquer que dû au fait que les directions $i \in \{n_- + 1, \dots, n\}$ ne sont pas affectées par les phénomènes de concentration, les domaines limites $V_1, \dots, V_k$ que nous obtenons dans le théorème 3.6 sont inclus dans un domaine de la forme

$$V = \mathbb{R}^{n_-} \times V_+, \tag{3.24}$$

où V_+ est un domaine borné de $\mathbb{R}^{n_+}$ tel que $\Omega \subset V_+$. La figure 3 illustre ce phénomène dans le cas de la boule unité $\mathbb{B}^3$ avec $n_- = 2$ et $n_+ = 1$. Dans ce cas, nous obtenons à la limite un domaine de la forme $\mathbb{R}^2 \times I$ où I est un intervalle borné de $\mathbb{R}$

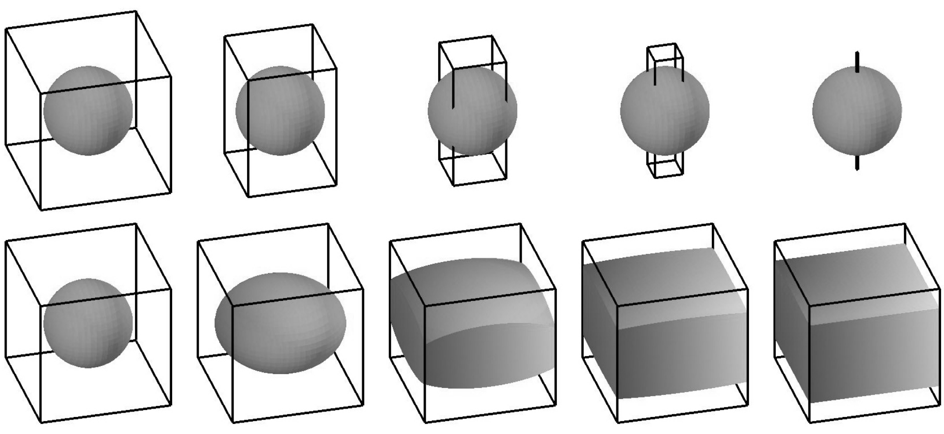

FIGURE 3. Déformation de la boule unité $\mathbb{B}^3$ sous l'effet du changement d'échelle $\tau^{\overrightarrow{p}}_{\mu_\alpha,\xi_\alpha}$ avec $n_- = 2$, $n_+ = 1$, $p_1 = p_2 = 1.5$, $p_3 = 6$, $\xi_\alpha = 0$ et $\mu_\alpha = 1, 9/10, 3/4, 3/5, 1/10$. La première ligne représente le changement d'échelle et la deuxième ligne représente la déformation du domaine pour chacune des valeurs de μ_α.

En ce qui concerne l'existence de solutions de l'équation (3.23), nous pouvons démontrer qu'il existe des solutions positives non triviales dans $D^{1,\overrightarrow{p}}(V)$ de l'équation (3.23) pour des domaines V de la forme (3.24) (cf. Vétois [18]). Dans le cas particulier où

$$p_1 = \cdots = p_{n_-} \quad \text{et} \quad p_{n_-+1} = \cdots = p_n = p^*,$$

nous disposons également d'exemple quasi-explicites de solutions positives non triviales dans $D^{1,\overrightarrow{p}}(\mathbb{R}^n)$ de l'équation (3.23) qui de plus s'annulent en dehors d'un domaine de la forme (3.24). En effet, par la méthode de séparation des variables, nous obtenons dans ce cas (cf. Vétois [18, corollaire 2.1]) l'existence de solutions $U_{\lambda,\mu,\xi}$ de l'équation (3.23) de la forme

$$U_{\lambda,\mu,\xi}(x) = \left(\frac{C_{n_-,p_-} \lambda^{-\frac{1}{p_-}} \mu^{\frac{1}{p_- - 1}}}{\mu^{\frac{p_-}{p_- - 1}} + |x - \xi|_-^{\frac{p_-}{p_- - 1}}} \right)^{\frac{n_- - p_-}{p_-}} \Psi\left(\lambda^{\frac{1}{p_+}} |x - \xi|_+ \right), \tag{3.25}$$

où $\mu > 0$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, $p_- = p_{n_-}$, C_{n_-,p_-} est comme dans (3.11), $|x - \xi|_-$ et $|x - \xi|_+$ sont définis par

$$|x - \xi|_\pm = \left(\sum_{i=1}^{n_\pm} |x_i - \xi_i|^{\frac{p_\pm}{p_\pm - 1}} \right)^{\frac{p_\pm - 1}{p_\pm}}$$

pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et la fonction $\Psi = \Psi(r)$ est une solution de l'équation différentielle

$$-r^{1-n_+} \left(r^{n_+ - 1} |\Psi'|^{p_+ - 2} \Psi' \right)' = |\Psi|^{p_+ - 2} \Psi - |\Psi|^{p_- - 2} \Psi \quad \text{sur } \mathbb{R}\,. \tag{3.26}$$

Franchi, Lanconelli et Serrin [76] ont démontré qu'il existe une solution Ψ de classe C^1 de l'équation (3.26) qui est paire, positive, à support compact dans $\mathbb{R}$ et décroissante sur $[0, \infty[$. Par un calcul sans difficulté, nous obtenons de plus que $U_{\lambda,\mu,\xi} \in D^{1,\overrightarrow{p}}(\mathbb{R}^n)$.

Références

Publications de l'auteur issues de la thèse de doctorat (Déc. 2008)

[1] A. El Hamidi et J. Vétois, *Sharp Sobolev asymptotics for critical anisotropic equations*, Archive for Rational Mechanics and Analysis **192** (2009), no. 1, 1–36.

[2] E. Hebey et J. Vétois, *Multiple solutions for critical elliptic systems in potential form*, Communications on Pure and Applied Analysis **7** (2008), no. 3, 715-741.

[3] A. M. Micheletti, A. Pistoia et J. Vétois, *Blow-up solutions for asymptotically critical elliptic equations*, Indiana University Mathematics Journal **58** (2009), no. 4, 1719–1746.

[4] J. Vétois, *Multiple solutions for nonlinear elliptic equations on compact Riemannian manifolds*, International Journal of Mathematics **18** (2007), no. 9, 1071–1111.

[5] J. Vétois, *A priori estimates for solutions of anisotropic elliptic equations*, Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications **71** (2009), no. 9, 3881–3905.

[6] J. Vétois, *Asymptotic stability, convexity, and Lipschitz regularity of domains in the anisotropic regime*, Communications in Contemporary Mathematics **12** (2010), no. 1, 35–53.

Publications de l'auteur postérieures à la thèse de doctorat dont les résultats sont présentés dans ce mémoire

[7] O. Druet, E. Hebey et J. Vétois, *Bounded stability for strongly coupled critical elliptic systems below the geometric threshold of the conformal Laplacian*, Journal of Functional Analysis **258** (2010), no. 3, 999–1059.

[8] O. Druet, E. Hebey et J. Vétois, *Static Klein–Gordon–Maxwell–Proca systems in 4-dimensional closed manifolds II*, Journal fr die reine und angewandte Mathematik (journal de Crelle) **713** (2016), no. 3, 149–179.

[9] P. Esposito, A. Pistoia et J. Vétois, *Blow-up solutions for linear perturbations of the Yamabe equation*, Concentration Analysis and Applications to PDE (ICTS Workshop, Bangalore, 2012), Trends in Mathematics, Birkhäuser/Springer, Basel, 2013, pp. 29–47.

[10] P. Esposito, A. Pistoia et J. Vétois, *The effect of linear perturbations on the Yamabe problem*, Mathematische Annalen **358** (2014), no. 1–2, 511–560.

[11] A. Pistoia et J. Vétois, *Sign-changing bubble towers for asymptotically critical elliptic equations on Riemannian manifolds*, Journal of Differential Equations **254** (2013), no. 11, 4245–4278.

[12] F. Robert et J. Vétois, *Sign-changing blow-up for scalar curvature type equations*, Communications in Partial Differential Equations **38** (2013), no. 8, 1437–1465.

[13] F. Robert et J. Vétois, *A general theorem for the construction of blowing-up solutions to some elliptic nonlinear equations via Lyapunov-Schmidt's reduction*, Concentration Analysis and Applications to PDE (ICTS Workshop, Bangalore, 2012), Trends in Mathematics, Birkhäuser/Springer, Basel, 2013, pp. 85–116.

[14] F. Robert et J. Vétois, *Examples of non-isolated blow-up for perturbations of the scalar curvature equation*, Journal of Differential Geometry **98** (2014), no. 2, 349–356.

[15] F. Robert et J. Vétois, *Sign-changing solutions to elliptic second order equations : glueing a peak to a degenerate critical manifold*, Calculus of Variations and Partial Differential Equations **54** (2015), no. 1, 693–716.

[16] P.-D. Thizy et J. Vétois, *Positive clusters for smooth perturbations of a critical elliptic equation in dimensions four and five* (2016). Prépublication sur arXiv: 1603.06479.

[17] J. Vétois, *The blow-up of critical anistropic equations with critical directions*, NoDEA Nonlinear Differential Equations and Applications **18** (2011), no. 2, 173–197.

[18] J. Vétois, *Existence and regularity for critical anisotropic equations with critical directions*, Advances in Differential Equations **16** (2011), no. 1/2, 61–83.

[19] J. Vétois, *Decay estimates and a vanishing phenomenon for the solutions of critical anisotropic equations*, Advances in Mathematics **284** (2015), 122–158.

[20] J. Vétois, *A priori estimates and application to the symmetry of solutions for critical p-Laplace equations*, Journal of Differential Equations **260** (2016), no. 1, 149–161.

Autres publications de l'auteur postérieures à la thèse de doctorat dont les résultats ne sont pas présentés dans ce mémoire

[21] F. Cîrstea et J. Vétois, *Fundamental solutions for anisotropic elliptic equations : existence and a priori estimates*, Communications in Partial Differential Equations **40** (2015), no. 4, 727-765.

[22] J. Vétois, *Strong maximum principles for anisotropic elliptic and parabolic equations*, Advanced Nonlinear Studies **12** (2012), no. 1, 101–114.

[23] J. Vétois, *Continuity and injectivity of optimal maps*, Calculus of Variations and Partial Differential Equations **52** (2015), no. 3, 587–607.

[24] J. Vétois, *Decay estimates and symmetry of finite energy solutions to elliptic systems in R^n* (2016). Prépublication sur arXiv:1612.09245.

[25] J. Vétois, *Long time and finite time existence results for the Guan-Li mean curvature flow on warped product spaces* (2017). Prépublication sur arXiv:1705.10839.

Références citées autres que celles de l'auteur

[26] R. A. Adams et J. J. F. Fournier, *Sobolev Spaces*, 2nd ed., Pure and Applied Mathematics, vol. 140, Academic Press, New York, 2003.

[27] N. Akhmediev et A. Ankiewicz, *Partially coherent solitons on a finite background*, Phys. Rev. Lett. **82** (1998), no. 13, 2661–2664.

[28] C. O. Alves, *Existence of positive solutions for a problem with lack of compactness involving the p–Laplacian*, Nonlinear Anal. **51** (2002), no. 7, 1187–1206.

[29] A. Alvino, V. Ferone, G. Trombetti et P-L. Lions, *Convex symmetrization and applications*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **14** (1997), no. 2, 275–293.

[30] A. Ambrosetti et A. Malchiodi, *Perturbation methods and semilinear elliptic problems on $\mathbb{R}^n$*, Progress in Mathematics, vol. 240, Birkhäuser Verlag, Basel, 2006.

[31] B. Ammann et E. Humbert, *The second Yamabe invariant*, J. Funct. Anal. **235** (2006), no. 2, 377–412.

[32] S. Antontsev, J. I. Díaz et S. Shmarëv, *Energy methods for free boundary problems: Applications to nonlinear PDEs and fluid mechanics*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, vol. 48, Birkhäuser Boston Inc., Boston, 2002.

[33] T. Aubin, *Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev*, J. Differential Geom. **11** (1976), no. 4, 573–598.

[34] T. Aubin, *Equations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire*, J. Math. Pures Appl. (9) **55** (1976), no. 3, 269–296.

[35] A. Bahri et P.-L. Lions, *Morse index of some min-max critical points. I. Application to multiplicity results*, Comm. Pure Appl. Math. **41** (1988), no. 8, 1027–1037.

[36] G. Bianchi et H. Egnell, *A note on the Sobolev inequality*, J. Funct. Anal. **100** (1991), no. 1, 18–24.

[37] S. Brendle, *Blow-up phenomena for the Yamabe equation*, J. Amer. Math. Soc. **21** (2008), no. 4, 951–979.

[38] S. Brendle et F. C. Marques, *Blow-up phenomena for the Yamabe equation. II*, J. Differential Geom. **81** (2009), no. 2, 225–250.

[39] H. Brézis et J.-M. Coron, *Convergence of solutions of H–systems or how to blow bubbles*, Arch. Rational Mech. Anal. **89** (1985), no. 1, 21–56.

[40] H. Brézis et Y. Li, *Some nonlinear elliptic equations have only constant solutions*, J. Partial Differential Equations **19** (2006), no. 3, 208–217.

[41] J. P. Burke, J. L. Bohn, B. D. Esry et C. H. Greene, *Hartree-Fock theory for double condensates*, Phys. Rev. Lett. **78** (1997), no. 19, 3594–3597.

[42] J. Byeon et L. Jeanjean, *Standing waves for nonlinear Schrodinger equations with a general nonlinearity*, Arch. Rational Mech. Anal. **185** (2007), no. 2, 185–200.

[43] L. A. Caffarelli, B. Gidas et J. Spruck, *Asymptotic symmetry and local behavior of semilinear elliptic equations with critical Sobolev growth*, Comm. Pure Appl. Math. **42** (1989), no. 3, 271–297.

[44] G. Cerami, S. Solimini et M. Struwe, *Some existence results for superlinear elliptic boundary value problems involving critical exponents*, J. Funct. Anal. **69** (1986), no. 3, 289–306.

[45] Z. Chen et C. S. Lin, *Asymptotic behavior of least energy solutions for a critical elliptic system*, Int. Math. Res. Not. IMRN **21** (2015), 11045–11082.

[46] W. Y. Chen, J. C. Wei et S. S. Yan, *Infinitely many solutions for the Schrödinger equations in $\mathbb{R}^n$ with critical growth*, J. Differential Equations **252** (2012), no. 3, 2425–2447.

[47] D. N. Christodoulides, T. H. Coskun, M. Mitchell et M. Segev, *Theory of incoherent self-focusing in biased photorefractive media*, Phys. Rev. Lett. **78** (1997), no. 4, 646–649.

[48] A. Cianchi, *A fully anisotropic Sobolev inequality*, Pacific J. Math. **196** (2000), no. 2, 283–294.

[49] M. Clapp et T. Weth, *Multiple solutions for the Brézis-Nirenberg problem*, Adv. Differential Equations **10** (2005), no. 4, 463–480.

[50] D. Cordero-Erausquin, B. Nazaret et C. Villani, *A mass-transportation approach to sharp Sobolev and Gagliardo-Nirenberg inequalities*, Adv. Math. **182** (2004), no. 2, 307–332.

[51] L. Damascelli, S. Merchán, L. Montoro et B. Sciunzi, *Radial symmetry and applications for a problem involving the $-\Delta_p(\cdot)$ operator and critical nonlinearity in $\mathbb{R}^n$*, Adv. Math. **265** (2014), no. 10, 313–335.

[52] L. Damascelli et M. Ramaswamy, *Symmetry of C^1 solutions of p–Laplace equations in $\mathbb{R}^N$*, Adv. Nonlinear Stud. **1** (2001), no. 1, 40–64.

[53] E. N. Dancer, *Real analyticity and non-degeneracy*, Math. Ann. **325** (2003), no. 2, 369–392.

[54] E. N. Dancer, *Peak solutions without non-degeneracy conditions*, J. Differential Equations **246** (2009), no. 8, 3077–3088.

[55] M. del Pino, J. Dolbeault et M. Musso, *"Bubble-tower" radial solutions in the slightly supercritical Brezis-Nirenberg problem*, J. Differential Equations **193** (2003), no. 2, 280–306.

[56] M. del Pino, J. Dolbeault et M. Musso, *The Brezis-Nirenberg problem near criticality in dimension 3*, J. Math. Pures Appl. (9) **83** (2004), no. 12, 1405–1456.

[57] M. del Pino et P.L. Felmer, *Local mountain passes for semilinear elliptic problems in unbounded domains*, Calc. Var. Partial Differential Equations **4** (1996), no. 2, 121–137.

[58] M. del Pino, M. Musso, F. Pacard et A. Pistoia, *Large energy entire solutions for the Yamabe equation*, J. Differential Equations **251** (2011), no. 9, 2568–2597.

[59] M. del Pino, M. Musso, F. Pacard et A. Pistoia, *Torus action on S^n and sign-changing solutions for conformally invariant equations*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) **12** (2013), no. 1, 209–237.

[60] G. Devillanova et S. Solimini, *Concentration estimates and multiple solutions to elliptic problems at critical growth*, Adv. Differential Equations **7** (2002), no. 10, 1257–1280.

[61] G. Devillanova et S. Solimini, *A multiplicity result for elliptic equations at critical growth in low dimension*, Commun. Contemp. Math. **5** (2003), no. 2, 171–177.

[62] J. I. Díaz, *Nonlinear partial differential equations and free boundaries. Vol. I. Elliptic Equations*, Research Notes in Mathematics, vol. 106, Pitman, Boston, MA, 1985.

[63] E. DiBenedetto, *$C^{1+\alpha}$ local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations*, Nonlinear Anal. **7** (1983), no. 8, 827–850.

[64] W. Y. Ding, *On a conformally invariant elliptic equation on $\mathbb{R}^n$*, Comm. Math. Phys. **107** (1986), no. 2, 331–335.

[65] Z. Djadli et A. Jourdain, *Nodal solutions for scalar curvature type equations with perturbation terms on compact Riemannian manifolds*, Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. (8) **5** (2002), no. 1, 205–226.

[66] O. Druet, *From one bubble to several bubbles : the low-dimensional case*, J. Differential Geom. **63** (2003), no. 3, 399–473.

[67] O. Druet, *Compactness for Yamabe metrics in low dimensions*, Int. Math. Res. Not. **23** (2004), 1143–1191.

[68] O. Druet et E. Hebey, *Blow-up examples for second order elliptic PDEs of critical Sobolev growth*, Trans. Amer. Math. Soc. **357** (2005), no. 5, 1915–1929 (electronic).

[69] O. Druet et E. Hebey, *Elliptic equations of Yamabe type*, Int. Math. Res. Surv. **1** (2005), 1–113.

[70] O. Druet et E. Hebey, *Sharp asymptotics and compactness for local low energy solutions of critical elliptic systems in potential form*, Calc. Var. Partial Differential Equations **31** (2008), no. 2, 205–359.

[71] O. Druet et E. Hebey, *Stability for strongly coupled critical elliptic systems in a fully inhomogeneous medium*, Anal. PDE **2** (2009), no. 3, 305–359.

[72] O. Druet et E. Hebey, *Existence and a priori bounds for electrostatic Klein-Gordon-Maxwell systems in fully inhomogeneous spaces*, Commun. Contemp. Math. **12** (2010), no. 5, 831–869.

[73] O. Druet, E. Hebey et F. Robert, *Blow-up theory for elliptic PDEs in Riemannian geometry*, Mathematical Notes, vol. 45, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2004.

[74] A. El Hamidi et J-M. Rakotoson, *Extremal functions for the anisotropic Sobolev inequalities*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **24** (2007), no. 5, 741–756.

[75] I. Fragalà, F. Gazzola et B. Kawohl, *Existence and nonexistence results for anisotropic quasilinear elliptic equations*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **21** (2004), no. 5, 715–734.

[76] B. Franchi, E. Lanconelli et J. Serrin, *Existence and uniqueness of nonnegative solutions of quasilinear equations in $\mathbb{R}^n$*, Adv. Math. **118** (1996), no. 2, 177–243.

[77] Y. Ge, R. Jing et F. Pacard, *Bubble towers for supercritical semilinear elliptic equations*, J. Funct. Anal. **221** (2005), no. 2, 251–302.

[78] A. Gierer et H. Meinhardt, *A theory of biological pattern formation*, Kybernetik **12** (1972), 30–39.

[79] D. Gilbarg et N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, 2nd ed., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 224, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[80] M. Guedda et L. Véron, *Local and global properties of solutions of quasilinear elliptic equations*, J. Differential Equations **76** (1988), no. 1, 159–189.

[81] E. Hebey, *Sharp Sobolev inequalities for vector valued maps*, Math. Z. **253** (2006), no. 4, 681–708.

[82] E. Hebey, *Critical elliptic systems in potential form*, Adv. Differential Equations **11** (2006), no. 5, 511–600.

[83] E. Hebey, *Diagonal compactness for critical elliptic systems in potential form*, Comm. Partial Differential Equations **32** (2007), no. 10-12, 1837–1881.

[84] E. Hebey, *Compactness and stability for nonlinear elliptic equations*, Zurich Lectures in Advanced Mathematics, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2014.

[85] E. Hebey et T. Truong, *Static Klein-Gordon-Maxwell-Proca systems in 4-dimensional closed manifolds*, J. reine angew. Math. **667** (2012), 221–248.

[86] E. Hebey et M. Vaugon, *Existence and multiplicity of nodal solutions for nonlinear elliptic equations with critical Sobolev growth*, J. Funct. Anal. **119** (1994), no. 2, 298–318.

[87] E. Hebey et J. C. Wei, *Resonant states for the static Klein-Gordon-Maxwell-Proca system*, Math. Res. Lett. **19** (2012), no. 4, 953-967.

[88] F. T. Hioe, *Solitary waves for N coupled nonlinear Schrödinger equations*, Phys. Rev. Lett. **82** (1999), no. 6, 1152–1155.

[89] F. T. Hioe et Thom S. Salter, *Special set and solutions of coupled nonlinear Schrödinger equations*, J. Phys. A **35** (2002), no. 42, 8913–8928.

[90] D. Holcman, *Solutions nodales sur les variétés riemanniennes*, J. Funct. Anal. **161** (1999), no. 1, 219–245 (French).

[91] E. Jannelli et S. Solimini, *Concentration estimates for critical problems*, Ricerche Mat. **48** (1999), no. suppl., 233–257.

[92] L. Jeanjean et K. Tanaka, *Singularly perturbed elliptic problems with superlinear or asymptotically linear nonlinearities*, Calc. Var. Partial Differential Equations **21** (2004), 287–318.

[93] A. Jourdain, *Solutions nodales pour des équations du type courbure scalaire sur la sphère*, Bull. Sci. Math. **123** (1999), no. 4, 299–327 (French).

[94] T. Kanna et M. Lakshmanan, *Exact soliton solutions, shape changing collisions, and partially coherent solitons in coupled nonlinear Schrödinger equations*, Phys. Rev. Lett. **86** (2001), no. 22, 5043–5046.

[95] O. Kavian, *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*, Mathématiques & Applications (Berlin), vol. 13, Springer-Verlag, Paris, 1993.

[96] O. Kavian et S. Mischler, *A global approach to the Schrödinger-Poisson system : an existence result in the case of infinitely many states*, J. Math. Pures Appl. (9) **104** (2015), no. 5, 942–964.

[97] M. A. Khuri, F. C. Marques et R. M. Schoen, *A compactness theorem for the Yamabe problem*, J. Differential Geom. **81** (2009), no. 1, 143–196.

[98] J. M. Lee et T. H. Parker, *The Yamabe problem*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **17** (1987), no. 1, 37–91.

[99] Y. Y. Li et L. Zhang, *Compactness of solutions to the Yamabe problem. II*, Calc. Var. Partial Differential Equations **24** (2005), no. 2, 185–237.

[100] Y. Y. Li et L. Zhang, *Compactness of solutions to the Yamabe problem. III*, J. Funct. Anal. **245** (2007), no. 2, 438–474.

[101] Y. Y. Li et M. J. Zhu, *Yamabe type equations on three-dimensional Riemannian manifolds*, Commun. Contemp. Math. **1** (1999), no. 1, 1–50.

[102] G. M. Lieberman, *Gradient estimates for a new class of degenerate elliptic and parabolic equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **21** (1994), no. 4, 497–522.

[103] G. M. Lieberman, *Gradient estimates for anisotropic elliptic equations*, Adv. Differential Equations **10** (2005), no. 7, 767–812.

[104] C. S. Lin et W. M. Ni, *On the diffusion coefficient of a semilinear Neumann problem*, Calculus of variations and partial differential equations (Trento, 1986), Lecture Notes in Math., vol. 1340, Springer, Berlin, 1988, pp. 160–174.

[105] C. S. Lin, W. M. Ni et I. Takagi, *Large amplitude stationary solutions to a chemotaxis system*, J. Differential Equations **72** (1988), no. 1, 1–27.

[106] P.-L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case. I*, Rev. Mat. Iberoamericana **1** (1985), no. 1, 145–201.

[107] P.-L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case. II*, Rev. Mat. Iberoamericana **1** (1985), no. 2, 45–121.

[108] B. Liu et L. Ma, *Symmetry results for decay solutions of elliptic systems in the whole space*, Adv. Math. **225** (2010), no. 6, 3052–3063.

[109] A. M. Lyapunov, *Sur les figures d'équilibre peu différents des ellipsoides d'une masse liquide homogène doue d'un mouvement de rotation*, Zap. Akad. Nauk St. Petersburg (1906), 1-225.

[110] A. M. Lyapunov, *Problème général de la stabilité du mouvement*, Ann. Fac. Sci. Toulouse (2) **9** (1907), 203-474.

[111] F. C. Marques, *A priori estimates for the Yamabe problem in the non-locally conformally flat case*, J. Differential Geom. **71** (2005), no. 2, 315–346.

[112] R. Mazzeo et F. Pacard, *A construction of singular solutions for a semilinear elliptic equation using asymptotic analysis*, J. Differential Geom. **44** (1996), no. 2, 331–370.

[113] R. Mazzeo et F. Pacard, *Constant scalar curvature metrics with isolated singularities*, Duke Math. J. **99** (1999), no. 3, 353–418.

[114] C. Mercuri et M. Willem, *A global compactness result for the p–Laplacian involving critical nonlinearities*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **28** (2010), no. 2, 469–493.

[115] J. Moser, *On Harnack's theorem for elliptic differential equations*, Comm. Pure Appl. Math. **14** (1961), 577–591.

[116] M. Musso et A. Pistoia, *Tower of bubbles for almost critical problems in general domains*, J. Math. Pures Appl. (9) **93** (2010), no. 1, 1-40.

[117] M. Musso et J. C. Wei, *Nondegeneracy of Nodal Solutions to the Critical Yamabe Problem*, Commun. Math. Phys. **340** (2015), no. 3, 1049–1107.

[118] S.M. Nikol′skiĭ, *An imbedding theorem for functions with partial derivatives considered in different metrics*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **22** (1958), 321–336 (russe); English transl., Amer. Math. Soc. Transl. **90** (1970), no. 3, 27–44.

[119] M. Obata, *The conjectures on conformal transformations of Riemannian manifolds*, J. Differential Geometry **6** (1971/72), 247–258.

[120] I. Peral, *Multiplicity of Solutions for the p-Laplacian.* Lecture Notes at the Second School on Nonlinear Functional Analysis and Applications to Differential Equations, ICTP, Trieste, 1997. http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/ireneo/ICTP.pdf.

[121] A. Pistoia et G. Vaira, *Clustering phenomena for linear perturbation of the Yamabe equation* (2015). Prépublication sur arXiv:1511.07028.

[122] A. Pistoia et T. Weth, *Sign changing bubble tower solutions in a slightly subcritical semilinear Dirichlet problem*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **24** (2007), no. 2, 325–340.

[123] S. I. Pohožaev, *On the eigenfunctions of the equation* $\Delta u + \lambda f(u) = 0$, Dokl. Akad. Nauk SSSR **165** (1965), 36–39 (russe); English transl., Soviet Math. Dokl. **6** (1965), 1408–1411.

[124] P. Poláčik, P. Quittner et P. Souplet, *Singularity and decay estimates in superlinear problems via Liouville-type theorems. I. Elliptic equations and systems*, Duke Math. J. **139** (2007), no. 3, 555–579.

[125] B. Premoselli, *A pointwise finite-dimensional reduction method for a fully coupled system of Einstein-Lichnerowicz type* (2016). Prépublication sur arXiv:1605.05468.

[126] B. Premoselli et J. C. Wei, *Non-compactness and infinite number of conformal initial data sets in high dimensions*, J. Funct. Anal. **270** (2016), no. 2, 718–747.

[127] P. Quittner et P. Souplet, *Optimal Liouville-type theorems for noncooperative elliptic Schrödinger systems and applications*, Comm. Math. Phys. **311** (2012), no. 1, 1–19.

[128] O. Rey, *The role of the Green's function in a nonlinear elliptic equation involving the critical Sobolev exponent*, J. Funct. Anal. **89** (1990), no. 1, 1–52.

[129] J. Sacks et K. K. Uhlenbeck, *The existence of minimal immersions of* $2-$*spheres*, Ann. of Math. (2) **113** (1981), no. 1, 1–24.

[130] N. Saintier, *Asymptotic estimates and blow-up theory for critical equations involving the* $p-$*Laplacian*, Calc. Var. partial Differential Equations **25** (2006), no. 3, 299–331.

[131] E. Schmidt, *Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. III. Teil*, Math. Ann. **65** (1908), no. 3, 370–399 (allemand).

[132] R. M. Schoen, *Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature*, J. Differential Geom. **20** (1984), no. 2, 479–495.

[133] R. M. Schoen, *Notes from graduate lectures in Stanford University.* http://www.math.washington.edu/pollack/research/Schoen-1988-notes.html.

[134] R. M. Schoen, *Variational theory for the total scalar curvature functional for Riemannian metrics and related topics*, Topics in calculus of variations (Montecatini Terme, 1987), Lecture Notes in Math., vol. 1365, Springer, Berlin, 1989, pp. 120–154.

[135] R. M. Schoen, *On the number of constant scalar curvature metrics in a conformal class*, Differential geometry, Pitman Monogr. Surveys Pure Appl. Math., vol. 52, Longman Sci. Tech., Harlow, 1991, pp. 311–320.

[136] R. M. Schoen et S.-T. Yau, *On the proof of the positive mass conjecture in general relativity*, Comm. Math. Phys. **65** (1979), no. 1, 45–76.

[137] R. M. Schoen et S.-T. Yau, *Conformally flat manifolds, Kleinian groups and scalar curvature*, Invent. Math. **92** (1988), no. 1, 47–71.

[138] B. Sciunzi, *Classification of positive* $D^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$*–solutions to the critical* $p-$*Laplace equation in* $\mathbb{R}^N$, Adv. Math. **291** (2016), no. 1, 12-23.

[139] J. Serrin, *Local behavior of solutions of quasi-linear equations*, Acta Math. **111** (1964), no. 1, 247–302.

[140] M. Struwe, *A global compactness result for elliptic boundary value problems involving limiting nonlinearities*, Math. Z. **187** (1984), no. 4, 511–517.

[141] M. Struwe, *Variational methods : Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems*, 4th ed., Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics, vol. 34, Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[142] G. Talenti, *Best constant in Sobolev inequality*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **110** (1976), 353–372.

[143] P.-D. Thizy, *Klein–Gordon–Maxwell equations in high dimensions*, Comm. Pure Appl. Anal. **14** (2015), no. 3, 1097–1125.

[144] P.-D. Thizy, *Non-resonant states for Schrödinger-Poisson critical systems in high dimensions*, Arch. Math. (Basel) **104** (2015), no. 5, 485–490.

[145] P.-D. Thizy, *Schrödinger-Poisson systems in 4-dimensional closed manifolds*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **36** (2016), no. 4, 2257–2284.

[146] P.-D. Thizy, *Blow-up for Schrödinger-Poisson critical systems in dimensions 4 and 5*, Calc. Var. Partial Differential Equations **55** (2016), no. 1, Art. 20.

[147] P.-D. Thizy, *The Lin-Ni conjecture in negative geometries*, J. Differential Equations **260** (2016), no. 4, 3658–3690.

[148] P. Tolksdorf, *Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations*, J. Differential Equations **51** (1984), no. 1, 126–150.

[149] M. Troisi, *Teoremi di inclusione per spazi di Sobolev non isotropi*, Ricerche Mat. **18** (1969), 3–24 (italien).

[150] N. S. Trudinger, *On Harnack type inequalities and their application to quasilinear elliptic equations*, Comm. Pure Appl. Math. **20** (1967), 721–747.

[151] N. S. Trudinger, *Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) **22** (1968), 265–274.

[152] N. S. Trudinger, *An imbedding theorem for $H_0(G, \Omega)$ spaces*, Studia Math. **50** (1974), 17–30.

[153] J. L. Vázquez, *A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations*, Appl. Math. Optim. **12** (1984), no. 3, 191–202.

[154] J. C. Wei et T. Weth, *Radial solutions and phase separation in a system of two coupled Schrödinger equations*, Arch. Ration. Mech. Anal. **190** (2008), no. 1, 83–106.

[155] H. C. Wente, *Large solutions to the volume constrained Plateau problem*, Arch. Rational Mech. Anal. **75** (1980/81), no. 1, 59–77.

[156] H. Yamabe, *On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds*, Osaka Math. J. **12** (1960), 21–37.

[157] S. Yan, *A global compactness result for quasilinear elliptic equation involving critical Sobolev exponent*, Chinese J. Contemp. Math. **16** (1995), no. 3, 227–234.

Jérôme Vétois
Université de Nice Sophia Antipolis / McGill University
E-mail : jerome.vetois@mcgill.ca