Tsemo Aristide
5155 Avenue de Gaspe, Appt 214
H2T 2A1
Quebec, Canada
tsemoaristide@hotmail.com

Tours de torseurs géometrie differentielle des suites de compositions de fibrés principaux, et théorie des cordes.

Résumé.

Soient $f : M \to N$ un fibré principal de groupe structural L, et $1 \to H_1 \to L_1 \to L \to 1$ une extension de L à noyau commutatif H_1. Le problème d'étendre le groupe structural de f, en L_1, est formulé par la théorie des gerbes. Nous étudions la situation plus générale suivante: considérons une famille d'extensions à noyaux commutatifs $1 \to H_{i+1} \to L_{i+1} \to L_i \to 1$, $0 < i < n$. Le problème de $n-$relèvement est celui d'étendre le groupe structural de f à L_n. Il choukèle la notion de tour de torseurs que nous définissons, et étudions la géométrie différentielle. Nous définissons notamment les notions de structures connective, et holonomie, qui permettent de généraliser l'action de Wess Zumino Witten (WZW) aux branes. La théorie naturelle plus générale qui permettrait de formuler ce problème est celle des $n-$catégories, les nombreuses applications d'une telle théorie sont mentionnées dans les travaux de Alexandre Grothendieck, malheureusement elle est incomprise actuellement.

Introduction.

Soient N une variété differentielle, L un groupe de Lie, et $f : M \to N$ un fibré principal de fibre type L. Considérons la suite exacte:

$$1 \longrightarrow H \to L_1 \to L \to 1$$

où H est un groupe commutatif. Le probleme initial étudié appelé encore problème de $1-$relèvement, est celui de l'existence d'un fibré principal M_1, de fibre type L_1, et de base N, tel que le quotient de M_1 par H est M. L'existence d'un tel fibré n'est pas toujours assurée. L'obstruction à son existence est donnée par le cocycle classifiant d'une gerbe dont l'étude de la géométrie différentielle est bien connue.

Considérons maintenant une succession de suites exactes de groupes de Lie

$$0 \to H_1 \to L_1 \to L \to 0$$

...

$$0 \to H_{i+1} \to L_{i+1} \to L_i \to 0$$

...

$$0 \to H_n \longrightarrow L_n \longrightarrow L_{n-1} \to 0$$

telles que les H_i soient des groupes commutatifs. Le problème de $n-$relèvement est de déterminer les obstructions, et la géométrie différentielle du problème de l'existence de suites de fibrés principaux

$$f_i : M_i \to M_0 = N, i = 0, ..n.$$

telle que l'application f_i est une fibration principale de fibre type L_i, et le quotient de M_i par H_i est M_{i-1}.

L'existence des applications f_i entraine celle du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} ... \xrightarrow{f_n} N & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ N \xrightarrow{Id} N ... \xrightarrow{Id} N & & \end{array}$$

Les théories de faisceaux de catégories, et de gerbes, ont été définies par J. Giraud, et utilisées pour résoudre le premier problème de relèvement ont pour objectif de fournir le cadre théorique aux problèmes de recollement de structures d'ordre 1.

Deux méthodes fondamentales peuvent être mises en exerguent dans la construction de structures en mathématiques ce sont:

Le processus de complétion, qui consiste à l'extension de structures, et d'espaces où des problèmes non résolus trouveront solutions. Ce type de construction caractérise le passage de l'algèbre à l'analyse.

La seconde procédure est celle du recollement utilisée dans le présent problème. Pour résoudre les problèmes de recollement, ou de manière équivalente, pour recoller des objets définis localement, doivent être définies des théories cohomologiques interprétées géométriquement.

Cette dernière méthode de construction s'illustre dans l'exemple suivant:

Une variété topologique N est construite, en recollant des ouverts d'un espace vectoriel E à l'aide d'homeomorphismes. Pour étudier N, on généralise les outils définis dans l'étude de l'espace vectoriel E. C'est ainsi que les fonctions continues définies localement peuvent être définies sur N. Ce problème de $1-$recollement, est résolu par l'interprétation géométrique des groupes de cohomologies d'ordre 1 de la notion de faisceau inventé par J. Leray. La notion de faisceau conduit à celle de fibrés principaux localement triviaux. Est-il possible de recoller des fibrés définis localement? Pour résoudre ce problème de $2-$recollement, on utilise les notions de faisceaux de catégories et de gerbes définies par J. Giraud.

Plus généralement le problème de recollement des faisceaux de catégories conduit à celui de définir la notion de faisceaux de $3-$catégories,..., celui de recollement des faisceaux de $n-$catégories conduit à celui de définir la notion de faisceaux de $n+1-$catégories. Malheuresement il n'existe pas de théories satisfaisantes de $n-$catégories $n > 2$, bien qu'une telle théorie ait été initiée dans Tsemo[T2]. On contourne cette difficulté en introduisant la notion de tour de torseurs qui permet de donner une interprétation géométrique des classes de cohomologies abéliennes. Une tour de torseurs est définie par une suite de foncteurs $F_n \rightarrow F_{n-1} ... \rightarrow F_1$, à laquelle est associée une famille de faisceaux L_2,...,L_n définis sur F_1 qu'on suppose munie d'une topologie. Ces données doivent satisfaire des contraintes reflétant la notion de recollement. A une tour de torseurs, est associée un ensemble de classes de cohomologies $[c_2] \in H^2(F_1, L_2)$,..., $[c_n] \in H^n(F_1, L_n)$ déterminant la classe d'isomorphisme de la tour.

On associe au problème de $n-$relèvement une tour de torseurs $F_n \rightarrow F_{n-1}...F_2 \rightarrow F_1$, dont on étudie la géométrie différentielle. Les objets des catégories F_i sont des fibrés principaux au-dessus d'ouverts de N. On étend la notion de structure connective introduite par Brylinski à ce cadre, et on définit la courbure d'une structure connective, ainsi que les classes charactéristiques. A cette tour de torseurs, est associée des formes différentielles de N, définies à l'aide d'un recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ de N par des ouverts simplement contractibles:

La courbure L est une $n+1-$forme. Pour tout ouvert $U_{i_1 ... i_l}$, on définit une $n-l+1$ forme $u_{i_1..i_l}$. La relation suivante est vérifiée:

$$d(u_{i_1..i_l}) = \sum_{j=1}^{j=l} (-1)^j u_{i_1..\hat{i}_j..i_l}$$

pour $l < n+1$, et

$$\sum_{j=1}^{j=n+1} (-1)^j u_{i_1..\hat{i}_j..i_{n+1}} = (c_{i_1..i_{n+1}})^{-1} dc_{i_1..i_{n+1}}$$

En physique théorique moderne, la particule a été remplacée par la notion de corde. L'action déterminant cette évolution dans le modèle de WZW est définie par l'holonomie d'une structure connective d'une gerbe. Lorsque la corde est soumise à des contraintes ou branes, la formulation variationnelle du mouvement de la brane est définie par l'évolution d'une sous-variété N' de N sous une action déterminée par un ensemble de formes différentielles satisfaisant les propriétés mentionnées ci-dessus. Nous définissons l'holonomie d'une structure connective d'une tour de torseurs. Ceci permet de généraliser l'action de WZW en dimenension supérieure.

Les problèmes de recollements d'objets tirent leur origine dans les travaux d'Alexander Grothendieck. André Weil avait énoncé les conjectures de Weil concernant la fonction zeta, et avait suggéré que leurs démonstrations résulteraient de formule de Leftchetz d'une théorie de cohomologie adéquate. Jean Pierre Serre avait remarqué que les fibré principaux au-dessus des variétés algébriques était localement triviaux à un revêtement étale près. Motivé par ces idées, Alexander Grothendieck a défini une notion de cohomologie pour les catégories qu'il a appliqué ensuite à la géométrie algébrique cela a donné naissance à la cohomologie étale qui a permit a Pierre Deligne de démontré les conjectures de Weil. Les succès de cette approche ont suggéré à Alexandre Grothendieck de généraliser les théories d'homotopies au variétés algébriques. Une telle généralisation nécéssite une définition de notion de $n-$groupoides et $n-$gerbes dont de $n-$catégories, la notion de lacet n'existant pas en géométrie algébrique. En rang 1 tout de moins, le groupe fondamemtal se définit comme objet universel dans la catégorie des faisceaux localement constant. Grothendieck ceci a permi a Grothendieck de définir le groupe fondamental en topologie étale, obtenant une suite exacte ayant de nombreuses applications en arithmétiques. Voedvodsky a défini une homotopie motivique qui lui a permi de démontré une conjecture de Milnor.

I. Etude algébrique.

L'objectif de cette partie est de définir la notion de tour de torseurs ou tour torsée, et d'en déduire les principales propriétés algébriques. On commence d'abord par rappeller celle de gerbe, introduite par J. Giraud motivé par le problème de $1-$relevement. La notion de gerbe, se définit dans le cadre général de topologies des catégories que nous présentons maintenant.

Definitions 1.

Soit C une catégorie:

Un crible U est une sous-classe de la classe des objects $Obj(C)$ telle que pour tout élément u de U, et toute flèche $u' \to u$, u' est un élément de U.

Une topologie sur C est définie par la donnée pour tout objet u de C, d'une famille de cribles $J(u)$, dont les éléments sont appelés raffinements de u, vérifiant les propriétés suivantes:

Pour toute flèche $f : u' \to u$, et tout crible U de $J(u)$, $U^f = \{u" : u" \to u' \to u \in J(u)\}$ est un élément de $J(u')$.

Soit U un crible de u, si pour toute flèche $u' \to u$, $U^f \in J(u')$, alors U est un élément de $J(u)$.

L'exemple fondamental de topologies dans une catégorie est le suivant: Soit N un espace topologique. La catégorie de ses ouverts $Ouv(N)$ est munie de la topologie dont les raffinements d'un ouvert U, sont les ensembles d'ouverts $(U_i)_{i \in I}$, tels que $\bigcup_{i \in I} U_i = U$.

Définition 2.

Soit (C, J) une catégorie C, munie d'une topologie J. Un faisceau défini sur C, est un foncteur contravariant de C dans la catégorie des ensembles Set

$$F : C \to Set,$$

tel que pour tout objet u, et tout crible U de $J(u)$,

$$F(u) = lim_{u' \in U} F(u').$$

Nous allons à présent rappeler comment les propriétés de recollement d' objets s'expriment par la notion de faisceaux de catégories.

Definitions 3.

- Soient $f : F \to E$ un foncteur, x, y deux objets de F, et $n : x \to y$ une flèche dont l'image par f est la flèche $N : X \to Y$ de E. On dira que la flèche n est cartésienne si et seulement si, pour tout object z de la fibre au-dessus de X, c'est à dire tel que $f(z) = X$,

$$Hom_X(z, x) \to Hom_N(z, y)$$

$$m \to nm$$

est bijective, où $Hom_Z(z, x)$ est l'ensemble des flèches $u : z \to x$ telles que $f(u) = Id_X$, et $Hom_N(z, y)$ est l'ensemble des flèches $u' : z \to y$ telles que $f(u') = N$.

- On dira que la catégorie $F \to E$ est cartésienne, si pour toute flèche $N : X \to Y$ de E, il existe une flèche carésienne $n : x \to y$ dont l'image par f est N, et la composition de deux flèches cartésiennes est cartésienne.

- Soient $f : F \to E$ et $f' : F' \to E$ deux catégories catésiennes. Un foncteur $u : F' \to F$ est cartésien si et seulement si u respecte les fibres et l'image d'une flèche cartésienne est cartésienne. On dénote par $Cart_E(F', F)$ la catégorie des foncteurs cartésiens entre F' et F. Un exemple de foncteur cartésien est l'immersion $E_X \to E$, où E_X est la sous-catégorie des objets de E au-dessus de X.

Définition 4.

On dira que le foncteur $f : F \to E$ est un faisceau de catégories, si et seulement si pour tout objet X de E, et tout crible U de $J(X)$, le foncteur restriction:

$$Cart_E(E_X, F) \longrightarrow Cart_E(U, F)$$

est une équivalence de catégories. (E, J) est appelée la base du faisceau de catégories.

Proposition 1.

Soit (E, J) un topos muni d'une topologie J engendrée par la famille $(X_i \to X)_{i \in I}$, un faisceau de catégories de base (E, J) est équivalent à la donnée d'une correspondance

$$C : U \to C(U),$$

où U désigne un objet de E, et $C(U)$ une catégorie. Les propriétés suivantes sont satisfaites: Pour toute flèche $U \to V$ de E, il existe un foncteur

$$r_{U,V} : C(V) \to C(U)$$

telle que

$$r_{U,V} \circ r_{V,W} \simeq r_{U,V}.$$

En pratique on supposera toujours que la précédente équivalence est une égalité.

(i) Recollement des objets:

Soient X un objet de E, $(X_i \to X)_{i\in I}$ un recouvrement de X, x_i un objet de $C(X_i)$, et

$$g_{ij} : r_{X_i \times_X X_j, X_j}(x_j) \to r_{X_i \times_X X_j, X_i}(x_i)$$

une famille de flèches telles que $g_{ij}g_{jk} = g_{ik}$, il existe un objet x de $C(X)$ tel que $x_i = r_{X_i,X}(x)$.

(ii) Recollement des flèches:

Pour tous objets x et y de $C(U)$, le prefaisceau

$$U \to Hom(r_{U,X}(x), r_{U,X}(y))$$

est un faisceau de la catégorie au-dessus de X munie de la topologie induite.

Si de plus les propriétés suivantes sont satisfaites

(i') la topologie J est engendrée par une famille $(X_i)_{i\in I}$, telle que $C(X_i)$ n'est pas vide.

(ii') Pour tout objets x et y, de $C(X)$, $r_{X_i,X}(x)$ et $r_{X_i,X}(y)$ sont isomorphes.

(iii') Il existe un faisceau L défini sur C, tel que pour tout objet x de $C(X)$, $Hom(x,x) = L(X)$,

alors le faisceau de catégories est appelé gerbe, et L son lien.

Le cocycle associé à une gerbe.

Définissons maintenant le cocycle classifiant associé à une gerbe dont le lien est un faisceau en groupe abélien.

Pour tout élément X_i de la famille génératrice $(X_i)_{i\in I}$, on considère un objet x_i de $C(X_i)$, et une flèche

$$g_{ij} : r_{X_i \times_X X_j, X_j}(x_j) \to r_{X_i \times_X X_j, X_i}(x_i).$$

On définit alors

$$c_{ijk} = g_{ki}g_{ij}g_{jk}.$$

Théoreme 1. Giraud [Gi] p. 264.

La famille c_{ijk} est un $2-$cocycle de Cech. L'ensemble des gerbes sur E de lien L est isomorphe à $H^2(E, L)$.

Rappelons maintenant comment cette théorie s'applique au problème de $1-$relèvement des fibrés principaux.

Considérons un fibré principal localement trivial $f : M \to N$ de groupe structural L, et une extension $1 \to H \to L_1 \to L \to 1$ à noyau abélien H. On supppose que le morphisme $L_1 \to L$ a des sections locales.

Définissons la gerbe C sur la catégorie des ouverts de N, qui a tout ouvert U de N associe la catégorie $C(U)$, dont les objets sont les fibrés principaux localement triviaux de groupe structural L_1 au-dessus de U, tels que le quotient de tout objet e de $C(U)$ par H est la restriction de f à U. Les morphismes entre éléments de $C(U)$ sont les morphismes de fibrés principaux qui se projettent sur l'identité de $f_{|U}$.

Le cocycle associé à la gerbe C est à valeurs dans le faisceau des sections du $H-$fibré principal défini sur N par f. Il se définit comme suit:

On considère un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ par des ouverts contractibles. On choisit dans toute catégorie $C(U_i)$ un objet x_i, et un morphisme $g_{ij} : x^i_j \rightarrow x^j_i$. Le cocycle est alors défini par $c_{ijk} = g_{ki}g_{ij}g_{jk}$.

2. Le cas général.

Dans un de nos travaux récents [T2], nous avons défini la notion de tour de gerbes pour résoudre les problèmes d'extensions. Cette notion n'est pas utile dans toute sa généralité pour étudier le problème de $n-$relèvement des fibrés principaux. Dans la suite on va développer une notion moins générale qu'on appelle tour de torseurs ou tour torsée.

Définition 5.

Une tour de torseurs est une suite de foncteurs

$$F_n \longrightarrow F_{n-1} ... F_2 \longrightarrow F_1,$$

Soit U un objet de F_1, on note F_{p_U}, les objets de F_p se projettant sur U par la suite de foncteurs $F_p \rightarrow F_1$. Pour toute flèche $U \rightarrow V$, il existe un foncteur restriction $r^p{}_{U,V} : F_{p_V} \rightarrow F_{p_U}$ tel que $r^p{}_{U_1,U_2} \circ r^p{}_{U_2,U_3} = r^p{}_{U_1,U_3}$ vérifiant les propriétés suivantes:

(1) Le foncteur $p_2 : F_2 \rightarrow F_1$ est une gerbe de lien L_2.

(2) Les flèches de la catégorie F_i, se projettant sur l'identité par le foncteur $p_i : F_i \rightarrow F_{i-1}$ $i > 1$ sont inversibles.

(3) Il existe des faisceaux L_2,...,L_n définis sur F_1 tels que pour tout objet x_i de F_i, et x_{i+1} de $F_{i+1_{x_i}}$, il existe un isomorphisme:

$$Aut_{x_i}(x_{i+1}) \rightarrow L_{i+1}(p_2..p_{i+1}(x_{i+1}))$$

Cet isomorphisme est naturel dans le sens qu'il existe un isomorphisme:

$$L_{i+1}(p_2..p_{i+1}(x_{i+1})) \rightarrow Aut_{x_i}(F_{i+1_{x_i}}).$$

$$f \longrightarrow u(f)$$

où $Aut_{x_i}(F_{i+1_{x_i}})$ est le groupe des automorphismes de $F_{i+1_{x_i}}$ qui se projettent sur l'identité. Pour tout objet x_{i+1} de $F_{i+1_{x_i}}$, l'action de $u(f)$ sur x_{i+1} est celle définie par l'isomorphisme précédent entre $L_{i+1}(p_2..p_{i+1}(x_{i+1}))$ et $Aut_{x_i}(x_{i+1})$.

(4) Les flèches de F_i se projettant sur l'identité sont cartésiennes. Pour toute flèche $n : x_i \to y_i$, de la catégorie F_i, se projettant sur l'identité. et la composition de deux tels relevés cartésiens est cartésienne. Il existe donc une flèche

$$n^* : x_{i+1} \to y_{i+1},$$

au-dessus de n telle que pour toute flèche $m : y_i \to z_i$ de F_i,

$$(mn)^* = u(m,n)m^*n^*$$

où $u(m,n)$ désigne un automorphisme de z_{i+1} se projettant sur l'identité.

(5) Connectivité locale

Il existe un recouvrement $(U_i \to U)_{i\in I}$ de U telle que Pour tout éléments x_{l+1} et y_{l+1} de F_{l+1}, on suppose que $p_{l+1}...p_2(x_{l+1}) = p_{l+1}...p_2(y_{l+1}) = U_i$ il existe un isomorphisme $u_l : x_{l+1} \to y_{l+1}$ qui se projette sur l'identité de $p_{l+1}..p_c(x_{l+1})$ si $p_{l+1}..p_c(x_{l+1}) = p_{l+1}..p_c(y_{l+1})$. Cet automorphisme commute avec l'action de L_{l+l} de (3) et L'_l voir (6).

(6) La tour torsée est abélienne si et seulement si les faisceaux L_i sont commutatifs, $Aut(F_{i+1_{x_i}})$ $i > 1$, le groupe des automorphismes de la fibre $F_{p+1_{x_{p-1}}}$, se projettant sur l'identité de x_{p-1} est un faisceau en groupes abéliens L'_p au-dessus de F_1 commutant avec les isomorphismes définis en (5).

(7) Il existe une famille couvrante $(X_i \to X)_{i\in I}$ telle que pour tout i, $F_{l\,X_i}$ n'est pas vide.

(8) L' application $n \to m^*n^*$ est linéaire.

Définition 6.

Soit U un objet de F_1, la fibre de U est la $n-1-$tour de torseurs $F'_{n-1} \to ... \to F'_1$, telle que F'_1 est la fibre F_{2U}, supposons définie la catégorie F'_i, les objets de F'_{i+1} sont les objets des catégories $F_{i+2_{e'_i}}$ où e'_i est un objet de F'_i. Les morphismes et extensions sont induits par ceux de la tour $F_n \to .. \to F_1$.

Définition 7.

Soient $T_i = {F_n}^i \to {F_{n-1}}^i \to .. \to {F_1}^i$, $i = 1, 2$ deux tours torsées de même liens $(L_2, .., L_n)$ telles que ${F_1}^1$ est ${F_1}^2$. Un $n-i$morphisme entre T_1 et T_2, est une famille de foncteurs $u_n : {F_n}^1 \to {F_n}^2$,...,$u_{n-i} : {F_{n-i}}^1 \to {F_{n-i}}^2$ tels que le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{array}{c}
{F_n}^1 \xrightarrow{{f_n}^1} {F_{n-1}}^1 ... {F_{n-i}}^1 \xrightarrow{{f_{n-i}}^1} {F_{n-i-1}}^1 \\
u_n \downarrow u_{n-1} \downarrow\downarrow u_{n-i+1} \\
{F_n}^2 \xrightarrow{{f_n}^2} {F_{n-1}}^2 ... {F_{n-i}}^2 \xrightarrow{{f_{n-i}}^1} {F_{n-i-1}}^2
\end{array}$$

On suppose de plus que le foncteur u_1 est continu.

Un $n-1-$morphisme est un isomorphisme si et seulement si il existe un morphisme $(v_1, ..., v_n) : T_2 \to T_1$ tel que $v_iu_i \simeq Id_{F_i^1}$, et $u_iv_i \simeq Id_{F_i^2}$, les isomorphismes entre les foncteurs précédents sont des isomorphismes de catégories fibrées qui commute avec l'action de L_i.

On munit ainsi la classe des tours torsées de structures de catégories, dont les flèches sont les $n-i-$morphismes qu'on appelle catégorie des $n-i-$champs et qu'on dénote par $Cham(n-i)$.

Soit C une catégorie, considérons une sous-catégorie $Cham(C)$ de la catégorie des champs appelée encore catégorie des faisceaux de catégories de base C, telle que

(i) Les objets de $Cham(C)$ sont des gerbes de lien commutatif.

(ii) Munie de la structure de catégorie dont les morphismes sont les morphismes de gerbes, la catégorie $Cham(C)$ est abélienne.

La classification des extensions $0 \rightarrow F'_1 \rightarrow F_{n-1}.. \rightarrow F_1 \rightarrow 0$, est un problème résolu dans les catégories abéliennes. Les classes d'isomorphismes sont déterminées par $Ext^{n-1}(F'_1, F_1))$.

Les cocycles classifiant d'une tour de torseurs.

On va associer à une tour de torseurs abélienne $F_n \rightarrow F_{n-1}...F_2 \rightarrow F_1$, une suite de $l-$cocycles c_l à valeurs dans L_l, dont la classe de cohomologie appartenant à $H^l(F_1, L_l)$ ne dépend pas de la classe d'isomorphisme de la tour.

La famille couvrante de la topologie de F_1, $(X_i \rightarrow X)_{i\in I}$, utilisée pour construire le cocycle sera supposée contractible, ceci implique que les groupes de cohomologie de Cech d'un faisceau relatifs à ce recouvrement sont les groupes de cohomologie du faisceau.

Supposons que la catégorie F_1 est un topos, on désigne par U son objet final. On notera $X_{i_1..i_n}$ le produit fibré $X_{i_1} \times_U X_{i_2} .. \times_U X_{i_n}$, par $F_{l X_{i_1..i_l}}$ les objets de F_l qui se projettent sur $X_{i_1..i_l}$ et par la suite de foncteurs $F_l \rightarrow F_{l-1}.. \rightarrow F_1$. Pour un objet $x_{i_1..i_l}$ de $F_{l X_{i_1..i_l}}$, on notera ${x_{i_1..i_l}}^{i_{l+1}..i_j}$ sa restriction à $X_{i_1..i_j}$.

Considérons la flèche

$$g_{ij} : x^i_j \rightarrow x^j_i$$

et définissons la $2-$chaine

$$c_{i_1i_2i_3} = g_{i_3i_1}g_{i_1i_2}g_{i_2i_3}$$

à valeurs dans L_2. Giraud [Gi] a démontré que $c_{i_1i_2i_3}$ est un $2-$cocycle. La chaine $c_{i_1i_2i_3}$ est un morphisme de la restriction ${x_{i_3}}^{i_1i_2}$, de x_{i_3} à $X_{i_1i_2i_3}$.

Soit $x_{i_1i_2i_3i_4}$ un objet de ${F_{3x_{i_3}}}^{i_1i_2i_4}$.

Les morphismes $c_{i_1i_2i_3}$, $c_{i_1i_2i_4}$, $c_{i_1i_3i_4}$, ...,$c_{i_2i_3i_4}$ de ${x_{i_3}}^{i_1i_2i_4}$ se relèvent en des morphismes $(c_{i_1i_2i_3})^*$, $(c_{i_1i_2i_4})^*$, $(c_{i_1i_3i_4})^*$,...,$(c_{i_2i_3i_4})^*$ de $x_{i_1i_2i_3i_4}$ d'après l'axiome (4).

On peut définir

$$d(c_2)^* = (c_{i_2i_3i_4})^* - (c_{i_1i_3i_4})^* + (c_{i_1i_2i_4})^* - (c_{i_1i_2i_3})^*.$$

Puisque c_2 est une chaine, on déduit de l'axiome 3 qu'il existe un élément $c_{i_1..i_4}$ appartenant à $L_3(X_{i_1} \times_X .. \times X_{i_4})$ tel que $d(c_2)^* = c_{i_1i_2i_3i_4} = c_3(X_{i_1i_2i_3i_4})$.

Proposition 2.
La chaine c_3 est un cocycle de Cech.

Preuve.
On a

$$\sum_{l=1}^{l=5}(-1)^l c_{i_1..\hat{i}_l..i_5}$$
$$=\sum_{l=1}^{l=5}(-1)^l\sum_{j=1}^{j=5}(-1)^j(c^*_{i_1..\hat{i}_j..\hat{i}_l..i_5})=0$$

La dernière égalite résulte de l'axiome (6).

Supposons défini le cocycle c_l, représenté par la chaine $c_{i_1...i_{l+1}}$, automorphisme de $x_{i_1...i_{l+1}}$. Considérons un objet $x_{i_1...i_{l+2}}$ de la fibre $F_{l+1}{}^{i_{l+2}}_{x_{i_1...i_{l+1}}}$. Les morphismes $c_{i_2..i_{l+2}}$, $c_{i_1i_3..i_{l+2}}$,..,$c_{i_1..i_{l+2}}$ se relèvent en des morphismes $(c_{i_2..i_{l+2}})^*$, $(c_{i_1i_3..i_{l+2}})^*$,..,$(c_{i_1..i_{l+1}})^*$ de $x_{i_1..i_{l+2}}$, d'après l'axiome (3).

$$\sum_{j=1}^{j=l+2}(-1)^j(c_{i_1..\hat{i}_j..i_{l+2}})^*=c_{i_1..i_{l+2}}$$

où $c_{i_1..i_{l+2}}$ est un élément de $L_{l+1}(X_1\times_X..\times_X X_{l+2})$. Cette dernière affirmation résulte du fait que la chaine $c_{i_1..i_{l+1}}$ est un cocycle, et de l'axiome 3.

Proposition 3.
La chaine $c_{i_1...i_{l+2}}$ est un cocycle.

Preuve.
On a:

$$\sum_{j=1}^{j=l+3}(-1)^j c_{i_1..\hat{i}_j..i_{l+3}}$$
$$=\sum_{j=1}^{j=l+3}(-1)^l\sum_{d=1}^{d=l+3}(-1)^j c^*_{i_1..\hat{i}_j..\hat{i}_l..i_{l+3}}=0.$$

La dernière égalité résulte de l'axiome (6).

On va maintenant montrer que les classes de cohomologie des cocycles $c_2,..,c_n$ ne dépendent pas des différents choix effectués pour les construire.

Proposition 4.
La classe de cohomologie du cocycle c_n est indépendant des différents choix effectués pour la définir.

Preuve.

Les résultats de Giraud [Gi] prouvent que le cocycle c_2 ne dépend pas des différents choix effectués pour le construire. Supposons qu'il en ait de même pour le cocycle c_l.

Montrons que c_{l+1} ne dépend pas des relèvements des $(c_{i_1..i_{l+1}})^*$ effectués, les $x_{i_1..i_{l+2}}$ étant choisis. Considérons d'autres relèvement $(c'_{i_1..i_{l+1}})^*$ de $c_{i_1..i_{l+1}}$. Le morphisme $(c'_{i_1..i_{l+1}})^* - (c_{i_1..i_{l+1}})^*$ est un relèvement de l'identité de $x_{i_1..i_{l+1}}$. On en déduit de l'axiome 3, l'existence d'un élément $h_{i_1..i_{l+1}}$ de $L_{l+1}(X_{i_1..i_{l+1}})$ tel que $(c'_{i_1..i_{l+1}})^* = (c_{i_1..i_{l+1}})^* + h_{i_1..i_{l+1}}$. Il en résulte que la différence entre les cocycles définis par les relèvements $(c_{i_1..i_{l+1}})^*$ et $(c'_{i_1..i_{l+1}})^*$ est un bord.

Montrons maintenant que le cocycle ne dépend pas du choix des $x_{i_1..i_{l+2}}$. Considérons un autre choix d'éléments $x'_{i_1..i_{l+2}}$ dans $F_{l+1 x"_{i_1..i_{l+1}}}$. On note respectivement $(c_{i_1..i_{l+1}})^*$ et $(c'_{i_1..i_{l+1}})^*$, les relèvements de $c_{i_1..i_{l+1}}$ à $x_{i_1..i_{l+2}}$ et $x'_{i_1..i_{l+2}}$.

Considérons un morphisme $u : x_{i_1..i_{l+2}} \to x'_{i_1..i_{l+2}}$.

$$u(\sum_{j=1}^{j=l+2} (-1)^j (c_{i_1..\hat{i}_j..i_{l+2}})^*)u^{-1}$$

$$= \sum_{j=1}^{j=l+2} (-1)^j u(c^*_{i_1..\hat{i}_j..i_{l+2}})u^{-1}$$

$$(\sum_{j=1}^{j=l+2} (-1)^j (c'_{i_1..\hat{i}_j..i_{l+2}})^* + d(c)$$

où $d(c)$ est le bord d'une chaine.

$$u(\sum_{j=1}^{j=l+2} (-1)^j (c_{i_1..\hat{i}_j..i_{l+2}})^*)u^{-1} = c_{i_1..i_{l+2}}$$

d'après l'axiome 3. On en déduit le résultat.

Proposition 5.

Les classes de cohomologie des cocycles associés à deux tours de torseurs abéliennes isomorphes et de même liens $L_2, .., L_n$ sont identiques.

Preuve.

Soient $u = F_n \to F_{n-1}... \to F_1$, et $u' = F'_n \to F'_{n-1}... \to F'_1$, deux tours de torseurs isomorphes, par le biais de la famille d'isomorphismes fonctoriels $f_i : F_i \to F'_i$. On dénote respectivement par $(c_2, ..., c_n)$ et $(c'_2, ..., c'_n)$ les familles de cocycles associés aux tours u et u'. D'après la théorie de Giraud, les classes de cohomologie $[c_2]$ et $[c'_2]$ sont identiques. Supposons que les classes de cohomologie $[c_i]$ et $[c'_i]$ sont identiques et montrons que les classes $[c_{i+1}]$ et $[c'_{i+1}]$ coincident.

La famille $(u_1(X_i) \to u_1(X))_{i \in I}$ est une famille génératrice contractible de la topologie de F'_1. L'isomorphisme $f_{i+1} : F_{i+1} \to F'_{i+1}$ induit un isomorphisme $f_{i x_{i_1..i_l}} : F_{i+1 x_{i_1..i_{l+1}}} \to F'_{i+1 x_{i_1..i_{l+1}}}$. La famille $f_{i x_{i_1..i_l}}(x_{i_1..i_{l+2}}) = x'_{i_1..i_{l+2}}$ peut être choisie pour définir le cocycle $c'_{i_1..i_{l+2}}$ d'après la proposition 3, cette même proposition entraine que $f_{i x_{i_1..i_l}}(c_{i_1..i_{l+2}})^* f^{-1}_{i x_{i_1..i_l}}$ est un relèvement de $c'_{i_1..i_{l+1}}$. On en déduit le résultat.

Nous allons maintenant énoncer l'axiome de recollement des objets d'une tour torsée, nous avons besoin dans cette optique de la définition suivante:

Définition 8.
Soit $u = F_n \to F_{n-1} ... \to F_1$, une tour de torseurs. On dira que la tour u est triviale s'il existe une tour de torseurs $u' = F'_{n-1} \to F'_{n-2} ... \to F'_1$, une application croissante

$$j : \{1, ..., n-1\} \longrightarrow \{1, ..., n\}$$

telle que $j(n-1) = n$, des morphismes

$$f_i : F'_i \longrightarrow F_{j(i)}$$

tels que le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{array}{ccc} F'_i & \xrightarrow{f_i} & F_{j(i)} \\ & \downarrow & & \downarrow \\ F'_{i-1} & \xrightarrow{f_{i-1}} & F_{j(i-1)} \end{array}$$

Axiome de recollement des objets.

La tour de torseurs est triviale si et seulement si la classe de cohomologie du cocycle $[c_n]$ est nulle.

Considérons la catégorie fibrée $F_{i+1} \to F_i$, d'après l'axiome (6) il existe un faisceau abélien L'_{i+1} sur F_1 tel que $Aut(F_{i+1 x_i})$ l'ensemble des morphismes de $F_{i+1 x_i}$ ne se projettant pas forcément sur l'identité est l'ensemble des sections $L'_{i+1}(p_2..p_i(x_i))$ de L'_{i+1}. On a alors la suite exacte

$$0 \to L_{i+1} \to L'_{i+1} \to L_i \to 0$$

On en déduit la suite exacte en cohomologie:

$$... \to H^l(F_1, L_{i+1}) \to H^l(F_1, L'_{i+1}) \to H^l(F_1, L_i) \to H^{l+1}(F_1, L_{i+1})...$$

Proposition 9.
Le cocycle c_{l+1} est l'image de c_l par l'opérateur de Dolbeault.

Preuve.

La construction de la classe de cohomologie c_{l+1} est celle de l'image de c_l par l'opérateur de Dolbeault.

Une question importante est de déterminer les classes de cohomologie de $H^n(F_1, L_n)$ qui peuvent être réalisées comme classes classifiantes d'une tour torsée. La proposition précédente donne une interprétation géométrique de l'opérateur de Dolbeault et une condition nécessaire à cette réalisation. Cette condition est en fait aussi suffisante.

Théorème 2.
Soient $F_n \to F_{n-1}... \to F_1$ une tour de torseurs associée aux faisceaux $L_2, ..., L_n$, et L_{n+1} un faisceau défini sur F_1 et c_{n+1} un élément de $H^{n+1}(F_1, L_{n+1})$. On suppose qu'il existe faisceau L'_{n+1} sur F_1 et une suite exacte

$$0 \to L_{n+1} \to L'_{n+1} \to L_n \to 0$$

telle que c_{n+1} soit l'image de c_n par l'opérateur de Dolbeault. Alors on peut prolonger la tour de torseurs en une tour de torseurs $F_{n+1} \to F_n... \to F_1$.

Preuve.
On va construire la catégorie F_{n+1} comme suit: considérons l'objet $x_{i_1..i_{n+1}}$ de F_n, au-dessus de l'objet $x_{i_1..i_n}$ utilisé pour construire le cocycle c_n. Les objects de F_{n+1} sont les objets des gerbes triviales $L'_{n+1 x_{i_1..i_{n+1}}}$ dont chaque section est isomorphe à $L'_{n+1}(X_{i_1..i_{n+1}})$, le foncteur $F_{n+1} \to F_n$ associe à un élément de $L'_{n+1 x_{i_1..i_{n+1}}}$ l'objet $x_{i_1..i_{n+1}}$. Soient $x'_{i_1..i_{n+1}}$ un objet de F_n, $x_{i_1..i_{n+2}}$ et $x'_{i_1..i_{n+2}}$ des objets de F_{n+1} respectivement au-dessus de $x_{i_1..i_{n+1}}$, et $x'_{i_1..i_{n+1}}$. L'ensemble $Hom_{F_{i+1}}(x_{i_1..i_{n+2}}, x'_{i_1..i_{n+2}})$ se définit comme suit: $Hom_{F_{n+1}}(x_{i_1..i_{n+2}}, x'_{i_1..i_{n+2}})$, est l'ensemble $L'_{n+1}(X_{i_1..i_{n+1}})_u$ où u est une flèche entre $x_{i_1..i_{n+1}}$ et $x'_{i_1..i_{n+1}}$. On note (l, u) un de ses éléments, $l \in L'_{n+1}(X_{i_1..i_{n+1}})$ $(l, u) \circ (l', u') = (l + l', uu')$.

Proposition 10.
Soit $(c_2, ..., c_n)$ la famille de cocycles classifiant d'une tour torsée $F_n \to F_{n-1} \to ... \to F_1$. La nullité de la classe de cohomologie du cocycle c_l entraine celles des cocycles $c_j, j \geq l$.

Preuve.
Supposons que le cocycle c_l est défini par les chaines $c_{i_1..i_{l+1}}$, et que sa classe de cohomologie soit nulle. On peut alors supposer que la chaine $c_{i_1..i_{l+1}}$ est nulle et choisir $(c_{i_1..i_{l+1}})^* = 0$.

On va maintenant appliquer la notion de tour torsée à notre problème initial. On considère donc un fibré principal de groupe structural L_0, de base la variété différentielle N, et une suite d'extensions à noyaux commutatifs.

$$1 \to H_1 \to L_1 \to L_0 \to 1$$

...

$$1 \to H_n \to L_n \to L_{n-1} \to 1.$$

telles que le quotient L_{i+1}/L_{i-1} soit commutatif. et l'application $L_{i+1} \to L_i$ a des sections locales.

Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de N par des ouverts contractibles. On définit une tour de torseurs comme suit:

La catégorie F_0 est celle des ouverts de N,

Les objets de la catégories F_1 sont les fibrés principaux de groupe structural L_1 au-dessus des ouverts de N. Pour tout ouvert U de N, on dénote par F_{1U} les objets de F_1 de base U. On suppose que le quotient des objets de F_{1U} par H_1 est la restriction du L_0-fibré principal à U. Les morphismes entre objets de F_{1U} sont les isomorphismes de fibrés qui se projettent sur l'identité. Les objets de F_{1U_i} sont isomorphes à $U_i \times L_1$. On définit ainsi une gerbe de lien le faisceau des fonctions de N à valeurs dans H_1.

Supposons définie la catégorie F_i. Un objet e_{i+1} de F_{i+1} est un fibré principal de groupe structural L_{i+1} de base un objet e_i de F_i, tel que le quotient de e_{i+1} par H_{i+1} est e_i. Soient e_{i+1} et e'_{i+1} deux objets de F_{i+1} qui se projettent sur e_i. L'ensemble $Hom(e_{i+1}, e'_{i+1})$ est constitué des morphismes de fibrés qui se projettent sur l'identité de e_i. Les axiomes qui définissent la notion de tour de torseurs sont satisfaits par la suite de foncteurs que nous venons de définir:

L'axiome (1) est satisfait car la catégorie F_1 est une gerbe de base la catégorie des ouverts de N.

L'axiome 2 est satisfait car les flèches des catégories F_i sont des morphismes de fibrés inversibles.

L'axiome 6 est satisfait car on a supposé que L_{i+1}/L_{i-1} est commutatif.

Il est évident de vérifier le reste des axiomes.

Le cocycle c_{i+1} est à valeurs dans le faisceau des fonctions définies sur N et à valeurs dans L_i.

Plus généralement on peut considérer les tour de gerbes $F_n \to F_{n-1} \to ...F_1 \to F_0$, où les fibres de $F_1 \to F_0$ sont des gerbes triviales dont les objets sont isomorphes à des fibrés principaux au-dessus des ouverts de N, supposons que la catégorie F_i est définie. La fibre de e_i de F_i pour le foncteur $F_{i+1} \to F_i$ est une gerbe triviale dont les objets sont des fibrés principaux de groupes structural L_{i+1} au-dessus de e_i. Les morphismes étant les applications de fibrés qui se projettent sur l'identité. Ces tours ne sont pas nécessairement définies par un problème de relèvement.

II Geométrie différentielle des tours de torseurs différentielles.

Le but de cette partie est d'étudier la géométrie différentielle des tours de torseurs, en commencant par rappeller celle des gerbes définie par Brylinski. On notera l'algèbre de Lie d'un groupe L par $\mathcal{L}$.

Géométrie différentielle des gerbes.

Considérons une gerbe principale C définie par un fibré principal h de groupe structural L, de base la variété N, et une extension $1 \to H_1 \to L_1 \to L \to 1$.

Définition 1.

Soit ω une connexion définie sur h, une structure connective sur C est définie par:

Pour tout ouvert U de N et tout objet e_U de $C(U)$, l'ensemble des connections $Co(e_U)$ image inverse de la restriction de ω à U. Soit $(V_i)_{i\in I}$ un recouvrement de U par des ouverts contractibles. La restriction de la connection ω est définies par des $1-$formes locales $\omega_i : V_i \to \mathcal{L}$ vérifiant $\omega_j - \omega_i = {g_{ij}}^{-1}d(g_{ij})$. Un élément w de $Co(e_U)$ est défini par des formes $w_i : V_i \to \mathcal{L}_1$ définissant une connection sur e_U telles que $\omega_i = h_1 \circ w_i$, où $h_1 : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}$ est la projection canonique.

Le cocycle caractéristique d'une structure connective d'une gerbe.

Considérons un recouvrement de N, $(U_i)_{i\in I}$ par des ouverts contractibles. Pour tout objet e_i de $C(U_i)$, on choisit un élément w_i de $Co(e_i)$. Soit $g_{ij} : e^i_j \to e^j_i$ une flèche. La forme $\alpha_{ij} = w_j - {g_{ij}}^* w_i$ définie sur $U_i \cap U_j$, est à valeurs dans $\mathcal{H}_1$.

Proposition 1.

Les formes α_{ij} vérifient la relation:

$$\alpha_{jk} - \alpha_{ik} + \alpha_{ij} = c^{-1}_{ijk} dc_{ijk}.$$

où c_{ijk} est le cocycle classifiant de la gerbe.

Preuve.

On a:

$$\alpha_{jk} - \alpha_{ik} + \alpha_{ij} = w_k - {g_{jk}}^* w_j - (w_k - {g_{ik}}^* w_i) + {g_{jk}}^*(w_j - {g_{ij}}^* w_i)$$

$$= {g_{ik}}^*(w_i - {g_{ik}}^{*-1} {g_{jk}}^* {g_{ij}}^* w_i)$$

$$= w_i - {c_{ijk}}^* w_i = {c_{ijk}}^{-1} dc_{ijk}$$

Courbure d'une structure connective.

Pour tout ouvert U_i d'un recouvrement contractible de N, et e_i un objet de $C(U_i)$, considérons un élément w_i de $Co(e_i)$, la courbure de w_i est la $2-$forme:

$$L(w_i) = d(w_i) + \frac{1}{2}[w_i, w_i]$$

Tout élément de $Co(e_i)$ w'_i s'écrit $w'_i = w_i + u_i$, où u_i est une $1-$forme définie sur U_i à valeurs dans $\mathcal{H}_1$, on a

$$L(w'_i) = L(w_i) + d(u_i)$$

car H_1 est commutatif. Ceci implique que dL est une $3-$forme définie sur N à valeurs dans $\mathcal{H}_1$ appelée la courbure.

Le cas général.

On étudie la géométrie différentielle d'une tour de torseurs associée au problème d'extension du groupe structural des fibrés principaux.

On considère donc un fibré principal de groupe structural L_0 de base la variété différentielle N, et une suite d'extensions centrales:

$$1 \to H_1 \to L_1 \to L_0 \to 1$$

...

$$1 \to H_n \to L_n \to L_{n-1} \to 1.$$

On associé à cette suite une tour de torseurs $F_n \to F_{n-1} \to ... \to F_1 \to F$.

Définition 2.

Une structure connective sur la tour de torseurs précédente est définie comme suit:

On considère une connexion w^0 sur le L_0-fibré principal.

Soit U un ouvert de N, pour tout objet $e^1{}_U$ de F_{1U}, on considère l'ensemble $Co^1(e^1{}_U)$ des connexions définies sur $e^1{}_U$ qui se projettent sur la restriction de w_0.

Supposons défini l'ensemble de connexions $Co^i(e_i)$ pour tout objet e_i de F_i. Soit e_{i+1} un objet de F_{i+1} au-dessus de e_i, les éléments de $Co^{i+1}(e_{i+1})$ sont les connections définient sur e_{i+1} qui se projettent sur un élément de $Co^i(e_i)$.

Courbure d'une tour de torseurs.

Soit $F_n \to F_{n-1} \to ..F_1 \to F$ une tour de torseurs définie par un problème d'extension.

Pour tout objet e_i de F_{1U_i}, on considère une connection w_i, et $L(w_i)$ sa courbure. On a

$$d(L(w_i)) = d(L(w_j)),$$

ceci permet de définir la trois forme L^3 dont la restriction à U_i est $d(L(w_i))$. La forme L^3 est la courbure de la gerbe $F_1 \to F$.

Supposons définie la courbure de la tour $F_j \to .. \to F_1 \to F$, c'est une $j+2-$forme Ω^{j+2} à valeurs dans $\mathcal{L}_j$.

On considère un recouvrement $(U_i)_{i\in I}$ de N par des ouverts contractibles. Sur chaque U_i, on considère une $j+2-$forme c_i à valeurs dans $\mathcal{L}_{j+1}$ au-dessus de la restriction de Ω^{j+2} sur U_i.

La chaine $c_{i_2} - c_{i_1}$ est un $1-$cocycle de Cech à valeurs dans l'ensemble des $j+2-$formes définies sur N et à valeurs dans $\mathcal{H}_{j+1}$.

Le morphisme de De Rham-Cech l'identifie à une $j+3-$forme qui est la courbure de la tour de torseurs $F_{j+1} \to ... \to F$.

On définit ainsi la courbure L de la tour de torseurs qui est une $n+2-$forme à valeurs dans $\mathcal{H}_n$.

Une chaine différentielle fondamentale de la tour de torseurs.

Soient $c_{i_1..i_{n+2}}$ le $n+1-$cocycle classifiant de la tour de torseurs $F_n \rightarrow F_{n-1}... \rightarrow F_1 \rightarrow F$. On pose $u_{i_1..i_{n+2}} = log(c_{i_1..i_{n+2}})$. La chaine $u_{i_1..i_{n+2}}$ est un $n+1-$cocycle à valeurs dans $\mathcal{H}_n$. On déduit du théorème de De Rham-Cech l'existence d'un $n-$cocycle de $1-$formes $u^1_{i_1..i_{n+1}}$ tel que

$$d(u_{i_1..i_{n+2}}) = \sum_{j=1}^{j=n+2} (-1)^j {u^1}_{i_1..\hat{i}_j..i_{n+2}}$$

Supposons définis les $l-$formes $u^l_{i_1..i_{n-l+2}}$ tels que

$$d({u^{l-1}}_{i_1..i_{n-l+3}}) = \sum_{j=1}^{j=n-l+3} (-1)^j {u^l}_{i_1..\hat{i}_j..i_{n-l+3}}$$

On en déduit que

$$\sum_{j=1}^{j=n-l+3} (-1)^j d({u^l}_{i_1..\hat{i}_j..i_{n-l+3}}) = 0$$

On en déduit du théorème de Poincare-Cech l'existence de $l+1-$formes ${u^{l+1}}_{i_1..i_{n-l+1}}$ telles que

$$d({u^l}_{i_1..i_{n-l+2}}) = \sum_{j=1}^{j=n-l+2} (-1)^j {u^{l+1}}_{i_1..\hat{i}_j..i_{n+2}}$$

On en déduit par récurence l'existence d'une $n+2-$forme u^{n+2} forme sur N.

Proposition 2.
La classe de cohomologie de la courbure de la tour de torseurs coincide avec celle de la forme u^{n+2} définie au paragraphe précédent.

Preuve.
La preuve se fait par récurence. Considérons la tour de torseurs $F_n \rightarrow F_{n-1}.. \rightarrow F_1 \rightarrow F$, associée à un problème d'extension. Rapellons que la courbure de la gerbe $F_1 \rightarrow F$ est définie en considérons un revêtement contractible $(U_i)_{i\in I}$, un objet e_i de F_{1U_i}, et une connection w_i de $Co(e_i)$ La courbure $L(w_i)$ de w_i vérifie $L(w_j) = L(w_i) + d(u_{ij})$, où $u_{ij} = w_j - {g_{ij}}^* w_i$, de plus on a la relation $u_{i_2i_3} - u_{i_1i_3} + u_{i_1i_2} = (c_{i_1i_2i_3})^{-1} d(c_{i_1i_2i_3})$. La courbure est la forme donc la restriction à U_i est $dL(w_i)$. Ceci signifie que la courbure de la tour est la forme du paragraphe précédent associée à la gerbe $F_1 \rightarrow F$.

Supposons que l'énoncé vérifié pour la tour de torseurs $T_{n-1} = F_{n-1} \rightarrow F_{n-2}... \rightarrow F_1 \rightarrow F$. La construction de la courbure L initiale prouve que sa classe de cohomologie est l'image de celle de la courbure L' de T_{n-1} par l'homomorphisme $H^n(N, L_{n-1}) \to H^{n+1}(N, L_n)$.

Les constructions des formes u^{n+1} et u^{n+2} associées aux tours T_{n-1} et T_n montrent que $[u^{n+1}]$ est l'image de $[u^n]$ par le même homomorphisme précédent. On en déduit le résultat.

Classes charactéristiques des tours de torseurs.

Soit $T_n = F_n \to F_{n-1}.. \to F_1 \to F$ une tour torsée définie par un problème d'extension, munie d'une structure connective.

La courbure de T_n est une $n+2-$forme à valeurs dans $\mathcal{H}_n$. Pour tout polynome de $\mathcal{H}_n$, P, on définit la forme $P(L)$ qui est une forme caractéristique de la tour de torseur.

Holonomie d'une tour de torseurs.

Soit $T_n = F_n \to F_{n-1}.. \to F_1 \to F$ une tour de torseurs associée à un problème d'extension, munie d'une structure connective. Rappellons que la courbure est définie comme suit:

On considère $c_{i_1..i_{n+2}}$ le $n+1-$cocycle classifiant de la tour de torseurs $F_n \to F_{n-1}... \to F_1 \to F$. On pose $u_{i_1..i_{n+2}} = log(c_{i_1..i_{n+2}})$. Il existe des $l-$formes $u^l_{i_1..i_{n-l+2}}$ telles que

$$d({u^{l-1}}_{i_1..i_{n-l+3}}) = \sum_{j=1}^{j=n-l+3} (-1)^j {u^l}_{i_1..\hat{i}_j..i_{n-l+3}}$$

Supposons que la courbure u^{n+2} soit nulle, ceci implique que

$${u^{n+2}}_i = d({v^{n+1}}_i)$$

$${u^{n+1}}_{i_1 i_2} = {v^{n+1}}_{i_2} - {v^{n+1}}_{i_1} + d({v^n}_{i_1 i_2})$$

...

$$u^l_{i_1...i_{n-l+2}} = \delta(v^l_{i_1..i_{n-l+1}}) + d({v^{l-1}}_{i_1..i_{n-l+2}})$$

...

$$u^1_{i_1...i_{n+1}} = \delta({v^1}_{i_1..i_n}) + d(v_{i_1...i_{n+1}})$$

On dénote par $w_{i_1..i_{n+2}}$ la classe $(c_{i_1..i_{n+2}})^{-1}\delta(v_{i_1...i_{n+1}})$. C'est la classe d'holonomie de la tour.

Soit V une variété de dimension n sans bord et $h : V \to N$ une application différentiable. La courbure de la tour de torseur $h^*(T_n)$ est nulle. On peut définir le cocycle d'holonomie $h_{i_1..i_{n+2}}$. La dimension de V entraine que le cocycle $log(h_{i_1..i_{n+2}})$ est trivial, il est donc le bord d'un cocycle $h'_{i_1..i_{n+1}}$, tel que $d(h'_{i_1..i_{n+1}}) = 0$. On peut alors utiliser l'isomorphisme de De Rham Cech et identifier $h'_{i_1..i_{n+1}}$ à une $n-$forme $Hol(V)$ de V à valeurs dans $\mathcal{H}_n$. L'holonomie autour de V est:

$$\int_V Hol(V)$$

Applications à la physique théorique.

Soit x une particule se mouvant sur une variété riemmanienne $(N, <,>)$, lorsque la particule est libre, sa trajectoire est celle des géodésiques de $<,>$. Supposons que x soit soumis à un champ de forces L, représenté par une $2-$forme fermée de N qu'on note encore L. Si la deux forme $L = d(V)$ l'action de la formulation variationnelle du mouvement de x est de la forme:

$$\int_N V = 0$$

La forme L n'est pas toujours exacte, le mouvement de x à tout de même une solution variationnelle si la classe deux cohomologie de L est entière. Dans ce cas L est la première classe de Chern d'un fibré en cercle au-dessus de N. Il existe une connection Ω sur ce fibré défini sur un recouvrement contractible $(U_i)_{i\in I}$ de N par des $1-$formes w_i, l'action de x sur un chemin u est de la forme

$$\int_u u^* Hol(w_i, L)$$

où $Hol(w_i, L)$ est l'holonomie de la connection.

En physique théorique les cordes ont été remplacées les particules, une corde est une application de l'intervalle $c : I \to N$, les trajectoires des cordes sont des surfaces immersées dans N. L'action d'une corde dans le modèle WZW est de la forme

$$\int u^* Hol(w_i, u_{ij}, L)$$

où $Hol(w_i, u_{ij}, L)$ est l'holonomie d'une gerbe le long d'une surface plongée dans N par l'homomorphisme u. Cette action est celle de WZW.

Plus généralement en théorie des branes, on étudie les mouvements des immersions de $V \to N$, qui représentent les conditions limites de l'évolution des cordes. La formulation variationnelle de ce problème est donnée par une action généralisant celle de WZW par

$$\int_V Hol$$

où est l'holonomie d'une tour de torseus associée à un problème de relèvement.

Bibliographie.

[Bre] Breen, L. On the classification of $2-$gerbes and $2-$stacks. Asterisque, 225 1994.

[Br] Bredon, G. E. Sheaf theory. McGraw-HillBook Co., 1967.

[Bry] Brylinski, J.L Loops spaces, Characteristic Classes and Geometric Quantization, Progr. Math. 107, Birkhauser, 1993.

[Br-Mc] Brylinski, J.L, Mc Laughlin D.A, The geometry of degree four characteristic classes and of line bundles on loop spaces I. Duke Math. Journal. 75 (1994) 603-637.

[Ca-Mi] Alan L. Carey, Jouko Mickelsson The universal gerbe, Dixmier-Douady class, and gauge theory Lett.Math.Phys. 59 (2002) 47-60

[De] Deligne, P. Theorie de Hodge III, Inst. Hautes Etudes Sci. Math. 44 (1974), $5-77$.

[Du] Duskin, J. An outline of a theory of higher dimensional descent, Bull. Soc. Math. Bel. Série A 41 (1989) 249-277.

[Fri] Fried, D. Closed similarity affine manifolds. Comment. Math. Helv. 55 (1980) 576-582.

[Ga-Reis] Gawedzki, Reis N. WZW branes and gerbes Rev.Math.Phys. 14 (2002) 1281-1334

[Gi] Giraud, J. Cohomologie non abélienne.

[God] Godement R. Topologie algébrique et théorie des faisceaux. (1958) Hermann.

Grothendieck, Seminaire de Geometrie Algebrique.

[J] Johnson. D-branes. Cambridge University Press

[Mc] Maclane, S. Homology. Springer-Verlag, 1963.

[Mu-S] M. K. Murray, D. Stevenson (University of Adelaide) Commun.Math.Phys. 243 (2003) 541-555

[P] Polchinski, J. String theory. Cambridge University Press

[St] Stuart, J. Constructions with bundle gerbes. Ph D Thesis. University of Adelaide

[T1] Tsemo, A. Non abelian cohomology: the point of view of gerbed tower

[W] Witten, E. Quantum field theory and the Jones Polynomial, Comment. Math. Phys. 121 (1989) 351-399.

[Z] Zinn, J. Quantum field theory and critical phenomea. Oxford Sciences Publications