Predicate Logic Worksheet

Construct derivations for each of the following entailments.

1.
1	$\forall x \exists y A(x,y)$
2	$\forall x \forall y (A(x,y) \rightarrow A(y,x))$
3	$\forall x \forall y \forall z (A(x,y) \wedge A(y,z) \rightarrow A(x,z))$
?	$\forall x A(x,x)$

2.
1	$\exists x (P(x) \rightarrow \forall y Q(y))$
?	$\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$

3.
1	$\forall x (A(x) \rightarrow B(x))$
?	$\exists x A(x) \rightarrow \exists x B(x)$

4.
1	$P \rightarrow \forall x Q(x)$
?	$\forall x (P \rightarrow Q(x))$

5.
1	$\exists x B(x) \rightarrow \forall x L(x)$
2	$L(\mathsf{g}) \rightarrow S(\mathsf{g})$
3	$B(\mathsf{j})$
?	$\exists x S(x)$

6.
1	$C(\mathsf{f}) \wedge B(\mathsf{f},\mathsf{l})$
2	$\exists x (C(x) \wedge B(x,\mathsf{f}))$
3	$\forall x \forall y \forall z [(B(x,y) \wedge B(y,z)) \rightarrow B(x,z)]$
?	$\exists z [C(z) \wedge (B(z,\mathsf{f}) \wedge B(z,\mathsf{l}))]$

7.
1	$P(\mathsf{a})$
2	$\forall x (Q(x) \rightarrow \neg P(x))$
3	$R(\mathsf{b})$
?	$\neg \forall x Q(x) \wedge \exists x R(x)$

8.
1	$\forall x (S(x) \rightarrow B(x))$
2	$\exists x D(x)$
3	$\forall x (D(x) \rightarrow C(x))$
4	$\forall x (D(x) \rightarrow S(x))$
?	$\forall x (D(x) \rightarrow B(x))$

9.
1	$\forall y (\exists x P(x) \rightarrow Q(y))$
?	$\exists x P(x) \rightarrow \forall y Q(y)$

10.
1	$\forall x R(x) \vee \forall x S(x)$
?	$\forall x (R(x) \vee S(x))$

11.
1	$\exists x \forall y A(x,y)$
?	$\neg \forall x \exists y \neg A(x,y)$

12.
1	$\forall x (P(x) \rightarrow Q)$
?	$\exists x P(x) \rightarrow Q$

Possible Answers

1.

1		$\forall x \exists y A(x,y)$	
2		$\forall x \forall y (A(x,y) \to A(y,x))$	
3		$\forall x \forall y \forall z (A(x,y) \wedge A(y,z) \to A(x,z))$	
4	u	$\exists y A(u,y)$	($\forall$E), 1
5	u v	$A(u,v)$	
6	u v	$\forall y (A(u,y) \to A(y,u))$	($\forall$E), 2
7	u v	$A(u,v) \to A(v,u)$	($\forall$E), 6
8	u v	$A(v,u)$	($\to$E), 5, 7
9	u v	$A(u,v) \wedge A(v,u)$	($\wedge$I), 5, 8
10	u v	$\forall y \forall z (A(u,y) \wedge A(y,z) \to A(u,z))$	($\forall$E), 3
11	u v	$\forall z (A(u,v) \wedge A(v,z) \to A(u,z))$	($\forall$E), 10
12	u v	$A(u,v) \wedge A(v,u) \to A(u,u)$	($\forall$E), 11
13	u v	$A(u,u)$	($\to$E), 9, 12
14	u	$A(u,u)$	($\exists$E), 4, 5–13
15		$\forall x A(x,x)$	($\forall$I), 4–14

2.

1		$\exists x (P(x) \to \forall y Q(y))$	
2		$\forall x P(x)$	
3	u	$P(u) \to \forall y Q(y)$	
4	u	$P(u)$	($\forall$E), 2
5	u	$\forall y Q(y)$	($\to$E), 3, 4
6	u	$\forall x Q(x)$	(Change of bound variables), 5
7		$\forall x Q(x)$	($\exists$E), 1, 3–6
8		$\forall x P(x) \to \forall x Q(x)$	($\to$I), 2–7

3.

1		$\forall x (A(x) \to B(x))$	
2		$\exists x A(x)$	
3	u	$A(u)$	
4	u	$A(u) \to B(u)$	($\forall$E), 1
5	u	$B(u)$	($\to$E), 3, 4
6	u	$\exists x B(x)$	($\exists$I), 5
7		$\exists x B(x)$	($\exists$E), 2, 3–6
8		$\exists x A(x) \to \exists x B(x)$	($\to$I), 2–7

4.

1		$P \to \forall x Q(x)$	
2	u	P	
3	u	$\forall x Q(x)$	($\to$E), 1, 2
4	u	$Q(u)$	($\forall$E), 3
5		$P \to Q(u)$	($\to$I), 2–4
6		$\forall x (P \to Q(x))$	($\forall$I), 2–5

5.

1		$\exists x B(x) \to \forall x L(x)$	
2		$L(\mathsf{g}) \to S(\mathsf{g})$	
3		$B(\mathsf{j})$	
4		$\exists x B(x)$	($\exists$I), 3
5		$\forall x L(x)$	($\to$E), 1, 4
6		$L(\mathsf{g})$	($\forall$E), 5
7		$S(\mathsf{g})$	($\to$E), 2, 6
8		$\exists x S(x)$	($\exists$I), 7

6.

1		$C(\mathsf{f}) \wedge B(\mathsf{f},\mathsf{l})$	
2		$\exists x (C(x) \wedge B(x,\mathsf{f}))$	
3		$\forall x \forall y \forall z [(B(x,y) \wedge B(y,z)) \to B(x,z)]$	
4	u	$C(u) \wedge B(u,\mathsf{f})$	
5	u	$B(u,\mathsf{f})$	($\wedge$E), 4
6	u	$B(\mathsf{f},\mathsf{l})$	($\wedge$E), 1
7	u	$B(u,\mathsf{f}) \wedge B(\mathsf{f},\mathsf{l})$	($\wedge$I), 5, 6
8	u	$\forall y \forall z [(B(u,y) \wedge B(y,z)) \to B(u,z)]$	($\forall$E), 3
9	u	$\forall z [(B(u,\mathsf{f}) \wedge B(\mathsf{f},z)) \to B(u,z)]$	($\forall$E), 8
10	u	$B(u,\mathsf{f}) \wedge B(\mathsf{f},\mathsf{l})) \to B(u,\mathsf{l})$	($\forall$E), 9
11	u	$B(u,\mathsf{l})$	($\to$E), 7, 10
12	u	$B(u,\mathsf{f}) \wedge B(u,\mathsf{l})$	($\wedge$I), 5, 11
13	u	$C(u)$	($\wedge$E), 4
14	u	$C(u) \wedge (B(u,\mathsf{f}) \wedge B(u,\mathsf{l}))$	($\wedge$I), 12, 13
15	u	$\exists z [C(z) \wedge (B(z,\mathsf{f}) \wedge B(z,\mathsf{l}))]$	($\exists$I), 14
16		$\exists z [C(z) \wedge (B(z,\mathsf{f}) \wedge B(z,\mathsf{l}))]$	($\exists$E), 2, 4–15

7.

1		$P(\mathsf{a})$	
2		$\forall x(Q(x) \to \neg P(x))$	
3		$R(\mathsf{b})$	
4		$\forall x Q(x)$	
5		$Q(\mathsf{a})$	($\forall$E), 4
6		$Q(\mathsf{a}) \to \neg P(\mathsf{a})$	($\forall$E), 2
7		$\neg P(\mathsf{a})$	($\to$E), 5, 6
8		$\bot$	($\neg$E), 1, 7
9		$\neg\forall x Q(x)$	($\neg$I), 4–8
10		$\exists x R(x)$	($\exists$I), 3
11		$\neg\forall x Q(x) \wedge \exists x R(x)$	($\wedge$I), 9, 10

8.

1		$\forall x(S(x) \to B(x))$	
2		$\exists x D(x)$	
3		$\forall x(D(x) \to C(x))$	
4		$\forall x(D(x) \to S(x))$	
5	u	$D(u)$	
6	u	$D(u) \to S(u)$	($\forall$E), 4
7	u	$S(u)$	($\to$E), 5, 6
8	u	$S(u) \to B(u)$	($\forall$E), 1
9	u	$B(u)$	($\to$E), 7, 8
10		$D(u) \to B(u)$	($\to$I), 5–9
11		$\forall x(D(x) \to B(x)$	($\forall$I), 5–10

9.

1		$\forall y(\exists x P(x) \to Q(y))$	
2		$\exists x P(x)$	
3	u	$\forall y(\exists x P(x) \to Q(y))$	(R), 1
4	u	$\exists x P(x) \to Q(u)$	($\forall$E), 3
5	u	$\exists x P(x)$	(R), 2
6	u	$Q(u)$	($\to$E), 4, 5
7		$\forall y Q(y)$	($\forall$I), 3–6
8		$\exists x P(x) \to \forall y Q(y)$	($\to$I), 2–7

10.

1		$\forall x R(x) \vee \forall x S(x)$	
2	u	$\forall x R(x)$	
3	u	$R(u)$	($\forall$E), 2
4	u	$R(u) \vee S(u)$	($\vee$I), 3
5	u	$\forall x S(x)$	
6	u	$S(u)$	($\forall$E), 5
7	u	$R(u) \vee S(u)$	($\vee$I), 6
8		$R(u) \vee S(u)$	($\vee$E), 1, 2–4, 5–7
9		$\forall x(R(x) \vee S(x))$	($\forall$I), 2–8

11.

1		$\exists x \forall y A(x, y)$	
2		$\forall x \exists y \neg A(x, y)$	
3	u	$\forall y A(u, y)$	
4	u	$\exists y \neg A(u, y)$	($\forall$E), 2
5	u, v	$\neg A(u, v)$	
6	u, v	$A(u, v)$	($\forall$E), 3
7	u, v	$\bot$	($\neg$E), 5, 6
8	u	$\bot$	($\exists$E), 4, 5–7
9		$\bot$	($\exists$E), 1, 3–8
10		$\neg\forall x \exists y \neg A(x, y)$	($\neg$I), 2–9

12.

1		$\forall x(P(x) \to Q)$	
2		$\exists x P(x)$	
3	u	$P(u)$	
4	u	$P(u) \to Q$	($\forall$E), 1
5	u	Q	($\to$E), 3, 4
6		Q	($\exists$E), 2, 3–5
7		$\exists x P(x) \to Q$	($\to$E), 2–6