

Układy dynamiczne

Zadania domowe (seria VIII)

Zadanie 1. Wykaż, że dla ergodycznego przekształcenia $T: X \rightarrow X$, wartości własne operatora $U_T: L^2(X) \rightarrow L^2(X)$ (zdefiniowanego przez $U_T(f) = f \circ T$) tworzą grupę (z mnożeniem).

Zadanie 2. Wykaż, że funkcja $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dana przez $f(x) = \frac{x}{2}$ dla $x \neq 0$ oraz $f(0) = 1$, nie posiada Borelowskiej niezmienniczej miary probabilistycznej.

Zadanie 3. Niech (X, μ) będzie przestrzenią probabilistyczną, $A \subset X$ zbiorem mierzalnym miary dodatniej. Definiujemy miarę warunkową wzorem $\mu_A(B) = \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(A)}$. Dla $x \in A$ niech $n(x) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid T^n(x) \in A\}$. Wykaż, że formuła $T_A(x) = T^{n(x)}(x)$ definiuje przekształcenie zbioru A , które zachowuje μ_A . (Przekształcenie T_A nazywamy przekształceniem pierwszego powrotu indukowanym przez T na A .) Czy jeśli T jest ergodyczne, to T_A też jest ergodyczne?

Układy dynamiczne

Zadania domowe (seria VIII)

Zadanie 1. Wykaż, że dla ergodycznego przekształcenia $T: X \rightarrow X$, wartości własne operatora $U_T: L^2(X) \rightarrow L^2(X)$ (zdefiniowanego przez $U_T(f) = f \circ T$) tworzą grupę (z mnożeniem).

Zadanie 2. Wykaż, że funkcja $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dana przez $f(x) = \frac{x}{2}$ dla $x \neq 0$ oraz $f(0) = 1$, nie posiada Borelowskiej niezmienniczej miary probabilistycznej.

Zadanie 3. Niech (X, μ) będzie przestrzenią probabilistyczną, $A \subset X$ zbiorem mierzalnym miary dodatniej. Definiujemy miarę warunkową wzorem $\mu_A(B) = \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(A)}$. Dla $x \in A$ niech $n(x) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid T^n(x) \in A\}$. Wykaż, że formuła $T_A(x) = T^{n(x)}(x)$ definiuje przekształcenie zbioru A , które zachowuje μ_A . (Przekształcenie T_A nazywamy przekształceniem pierwszego powrotu indukowanym przez T na A .) Czy jeśli T jest ergodyczne, to T_A też jest ergodyczne?

Układy dynamiczne

Zadania domowe (seria VIII)

Zadanie 1. Wykaż, że dla ergodycznego przekształcenia $T: X \rightarrow X$, wartości własne operatora $U_T: L^2(X) \rightarrow L^2(X)$ (zdefiniowanego przez $U_T(f) = f \circ T$) tworzą grupę (z mnożeniem).

Zadanie 2. Wykaż, że funkcja $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dana przez $f(x) = \frac{x}{2}$ dla $x \neq 0$ oraz $f(0) = 1$, nie posiada Borelowskiej niezmienniczej miary probabilistycznej.

Zadanie 3. Niech (X, μ) będzie przestrzenią probabilistyczną, $A \subset X$ zbiorem mierzalnym miary dodatniej. Definiujemy miarę warunkową wzorem $\mu_A(B) = \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(A)}$. Dla $x \in A$ niech $n(x) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid T^n(x) \in A\}$. Wykaż, że formuła $T_A(x) = T^{n(x)}(x)$ definiuje przekształcenie zbioru A , które zachowuje μ_A . (Przekształcenie T_A nazywamy przekształceniem pierwszego powrotu indukowanym przez T na A .) Czy jeśli T jest ergodyczne, to T_A też jest ergodyczne?