Układy dynamiczne

Zadania domowe (seria V)

Zadanie 1. Niech TM oznacza czterowymiarową wiązkę styczną do dwuwymiarowego torusa $M = \mathbb{R} \bmod 1 \times \mathbb{R} \bmod 1$. Niech SM oznacza jej trójwymiarową podrozmaitość składającą się z wektorów jednostkowych w TM. Rozważmy rodzinę przekształceń $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ rozmaitości SM, przyporządkowujących wektorowi $v \in T_x M$ wektor $\phi_t(v) \in T_y M$ o tym samym kierunku, gdzie y powstaje z przesunięcia punktu x o czas t w kierunku v. Wykaż, że przekształcenia ϕ_t zachowują kanoniczną miarę na $SM = S^1 \times \mathbb{R}$.

Zadanie 2. Oznaczmy przez I odcinek $[0, 1]$. Rozważmy przekształcenie $\phi \colon I \to I$ przyporządkowujące liczbie $x \in I$ liczbę $\frac{1}{x} - \lfloor \frac{1}{x} \rfloor \in I$ (dla $x = 0$ dookreślamy dowolnie). Znajdź probabilistyczną miarę bezwzględnie ciągłą względem miary Lebesgue'a na I, niezmienniczą dla ϕ.

Układy dynamiczne

Zadania domowe (seria V)

Zadanie 1. Niech TM oznacza czterowymiarową wiązkę styczną do dwuwymiarowego torusa $M = \mathbb{R} \bmod 1 \times \mathbb{R} \bmod 1$. Niech SM oznacza jej trójwymiarową podrozmaitość składającą się z wektorów jednostkowych w TM. Rozważmy rodzinę przekształceń $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ rozmaitości SM, przyporządkowujących wektorowi $v \in T_x M$ wektor $\phi_t(v) \in T_y M$ o tym samym kierunku, gdzie y powstaje z przesunięcia punktu x o czas t w kierunku v. Wykaż, że przekształcenia ϕ_t zachowują kanoniczną miarę na $SM = S^1 \times \mathbb{R}$.

Zadanie 2. Oznaczmy przez I odcinek $[0, 1]$. Rozważmy przekształcenie $\phi \colon I \to I$ przyporządkowujące liczbie $x \in I$ liczbę $\frac{1}{x} - \lfloor \frac{1}{x} \rfloor \in I$ (dla $x = 0$ dookreślamy dowolnie). Znajdź probabilistyczną miarę bezwzględnie ciągłą względem miary Lebesgue'a na I, niezmienniczą dla ϕ.

Układy dynamiczne

Zadania domowe (seria V)

Zadanie 1. Niech TM oznacza czterowymiarową wiązkę styczną do dwuwymiarowego torusa $M = \mathbb{R} \bmod 1 \times \mathbb{R} \bmod 1$. Niech SM oznacza jej trójwymiarową podrozmaitość składającą się z wektorów jednostkowych w TM. Rozważmy rodzinę przekształceń $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ rozmaitości SM, przyporządkowujących wektorowi $v \in T_x M$ wektor $\phi_t(v) \in T_y M$ o tym samym kierunku, gdzie y powstaje z przesunięcia punktu x o czas t w kierunku v. Wykaż, że przekształcenia ϕ_t zachowują kanoniczną miarę na $SM = S^1 \times \mathbb{R}$.

Zadanie 2. Oznaczmy przez I odcinek $[0, 1]$. Rozważmy przekształcenie $\phi \colon I \to I$ przyporządkowujące liczbie $x \in I$ liczbę $\frac{1}{x} - \lfloor \frac{1}{x} \rfloor \in I$ (dla $x = 0$ dookreślamy dowolnie). Znajdź probabilistyczną miarę bezwzględnie ciągłą względem miary Lebesgue'a na I, niezmienniczą dla ϕ.