Układy dynamiczne

Zadania domowe (seria II)

Zadanie 1. Wykaż, że jeśli pole liniowe X w $\mathbb{R}^n$ jest strukturalnie stabilne, to punkt 0 musi być punktem hiperbolicznym pola X.
(Def: pole X jest *strukturalnie stabilne*, jeśli każde pole $\widetilde{X}$ z pewngo $\mathcal{C}^1$ otoczenia pola X w przestrzeni pól klasy $\mathcal{C}^1$ zadaje potok o portrecie fazowym topologicznie sprzężonym do portertu fazowego potoku pola X.)
Wskazówka: Jeśli 0 nie jest hiperboliczne, to dodając do X pole $Y(x) = \lambda x$ (dla małych λ) dostajemy pole, dla którego 0 jest punktem hiperbolicznym. Porównaj wymiary podprzestrzeni stabilnej punktu 0 dla $\lambda > 0$ i $\lambda < 0$.

Zadanie 2. Wykaż, że pole wektorowe Morse'a–Smale'a na zwartej spójnej rozmaitości nie ma niestałych całek pierwszych (czyli funkcji klasy $\mathcal{C}^1$, które są stałe na trajektoriach pola).

Zadanie 3. Uzasadnij, że pole $X = \nabla h,\ h(x, y, z) = -z$ dla funkcji h obciętej do torusa zanurzonego w $\mathbb{R}^3$, którego obrotowa oś symetrii jest prostopadła do osi z nie jest polem Morse'a–Smale'a, a na *pochylonym* torusie tak skonstruowane pole jest Morse'a–Smale'a.

Zadanie 4. Wykaż, że dyfeomorfizmy Morse'a–Smale'a nie są gęstym podzbiorem dyfeomorfizmów torusa dwuwymiarowego $\mathcal{D}\mathrm{iff}(\mathcal{T}^2)$ (z topologią $\mathcal{C}^1$).

Układy dynamiczne

Zadania domowe (seria II)

Zadanie 1. Wykaż, że jeśli pole liniowe X w $\mathbb{R}^n$ jest strukturalnie stabilne, to punkt 0 musi być punktem hiperbolicznym pola X.
(Def: pole X jest *strukturalnie stabilne*, jeśli każde pole $\widetilde{X}$ z pewngo $\mathcal{C}^1$ otoczenia pola X w przestrzeni pól klasy $\mathcal{C}^1$ zadaje potok o portrecie fazowym topologicznie sprzężonym do portertu fazowego potoku pola X.)
Wskazówka: Jeśli 0 nie jest hiperboliczne, to dodając do X pole $Y(x) = \lambda x$ (dla małych λ) dostajemy pole, dla którego 0 jest punktem hiperbolicznym. Porównaj wymiary podprzestrzeni stabilnej punktu 0 dla $\lambda > 0$ i $\lambda < 0$.

Zadanie 2. Wykaż, że pole wektorowe Morse'a–Smale'a na zwartej spójnej rozmaitości nie ma niestałych całek pierwszych (czyli funkcji klasy $\mathcal{C}^1$, które są stałe na trajektoriach pola).

Zadanie 3. Uzasadnij, że pole $X = \nabla h,\ h(x, y, z) = -z$ dla funkcji h obciętej do torusa zanurzonego w $\mathbb{R}^3$, którego obrotowa oś symetrii jest prostopadła do osi z nie jest polem Morse'a–Smale'a, a na *pochylonym* torusie tak skonstruowane pole jest Morse'a–Smale'a.

Zadanie 4. Wykaż, że dyfeomorfizmy Morse'a–Smale'a nie są gęstym podzbiorem dyfeomorfizmów torusa dwuwymiarowego $\mathcal{D}\mathrm{iff}(\mathcal{T}^2)$ (z topologią $\mathcal{C}^1$).

Układy dynamiczne

Zadania domowe (seria II)

Zadanie 1. Wykaż, że jeśli pole liniowe X w $\mathbb{R}^n$ jest strukturalnie stabilne, to punkt 0 musi być punktem hiperbolicznym pola X.
(Def: pole X jest *strukturalnie stabilne*, jeśli każde pole $\widetilde{X}$ z pewngo $\mathcal{C}^1$ otoczenia pola X w przestrzeni pól klasy $\mathcal{C}^1$ zadaje potok o portrecie fazowym topologicznie sprzężonym do portertu fazowego potoku pola X.)
Wskazówka: Jeśli 0 nie jest hiperboliczne, to dodając do X pole $Y(x) = \lambda x$ (dla małych λ) dostajemy pole, dla którego 0 jest punktem hiperbolicznym. Porównaj wymiary podprzestrzeni stabilnej punktu 0 dla $\lambda > 0$ i $\lambda < 0$.

Zadanie 2. Wykaż, że pole wektorowe Morse'a–Smale'a na zwartej spójnej rozmaitości nie ma niestałych całek pierwszych (czyli funkcji klasy $\mathcal{C}^1$, które są stałe na trajektoriach pola).

Zadanie 3. Uzasadnij, że pole $X = \nabla h,\ h(x, y, z) = -z$ dla funkcji h obciętej do torusa zanurzonego w $\mathbb{R}^3$, którego obrotowa oś symetrii jest prostopadła do osi z nie jest polem Morse'a–Smale'a, a na *pochylonym* torusie tak skonstruowane pole jest Morse'a–Smale'a.

Zadanie 4. Wykaż, że dyfeomorfizmy Morse'a–Smale'a nie są gęstym podzbiorem dyfeomorfizmów torusa dwuwymiarowego $\mathcal{D}\mathrm{iff}(\mathcal{T}^2)$ (z topologią $\mathcal{C}^1$).