Teoria sterowania

Zadania przygotowawcze do pierwszego kolokwium

Zadanie 1. Sprawdź sterowalność liniowego układu sterowania dla następujących macierzy:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 2. Czy poprzedni układ z macierzą obserwabli

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

jest obserwowalny?

Zadanie 3. Dla jakich wartości parametru $\rho \in \mathbb{R}$ poniższy układ jest sterowalny?

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{\cdot} = \begin{pmatrix} 2 & \rho - 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rho^2 - \rho & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 4. Wyprowadzić równanie opisujące zachowanie się wahadła matematycznego o masie m i długości l: $ml^2\ddot{x} - mlg\sin(x) = 0$. Wprowadźmy możliwość sterowania wahadłem poprzez przykładanie odp. momentu siły: $ml^2\ddot{x} - mlg\sin(x) = u$. Rozpatrzmy równanie uproszczone (nb. można je do takiego sprowadzić za pomocą tzw. sprzężenia zwrotnego) $ml^2\ddot{x} - mlgx = u$. Czy taki układ jest sterowalny ?

Zadanie 5. Rozpatrzmy funkcjonał $J(x) = \int_0^1 x^3 dt$, $x \in \mathcal{C}^1[0,1]$, $x(0) = 0 = x(1)$. Znajdź ekstremalę (rozwiązanie równania Eulera-Lagrange'a) tego funkcjonału. Czy ta ekstremala minimalizuje lub maksymalizuje funkcjonał?

Zadanie 6. Znajdź ekstremale funkcjonału $\int_0^1 (3x^2 + 3t^2 x')dt$, $x(0) = 0$, $x(1) = 1$.

Zadanie 7. Znajdź ekstremale o zadanych warunkach brzegowych dla następujących funkcjonałów

(a) $\int_1^2 t^3 (x')^2 dt$, $x(1) = 5$, $x(2) = 2$,
(b) $\int_1^2 (x')^3 t^{-2}$, $x(1) = 1$, $x(2) = 7$.

Zadanie 8. Znajdź ekstremale dla następującego funkcjonału i warunków brzegowych

$$\int_0^1 \cos(x')dt, \; x(0) = 0, \; x(1) \text{ swobodne.}$$

Zadanie 9. Znajdź ekstremalę („ze swobodnymi końcami") dla następującego funkcjonału

$$J(x) = \int_0^1 \frac{1}{2}((x')^2 + xx' + x' + x)dt.$$

Zadanie 10. Rozpatrzmy funkcjonał dwóch zmiennych

$$J(x_1, x_2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((x_1')^2 + (x_2')^2 + 2x_1 x_2)dt.$$

Znajdź ekstremale dla warunków brzegowych $x_1(0) = x_2(0) = 0$, $x_1(\frac{\pi}{2}) = x_2(\frac{\pi}{2}) = 1$. Rozpatrzyć ten sam problem ze swobodnymi końcami.

Zadanie 11. Sprawdź, czy spełniony jest warunek Legendre'a dla następujących funkcjonałów. W każdym z przypadków rozstrzygnij, czy postać $F_{x'x'}$ determinuje maksymalność/minimalność ekstremal.
(a) $\int_0^1((x')^2 + xx' + x' + x)dt$, końce swobodne,
(b) $J(x) = \int_0^1 x^3 dt$, $x(0) = 0$, $x(1)$ swobodne.

Zadanie 12. Znajdź krzywą o długości L leżącą w górnej półpłaszczyźnie ($y \geqslant 0$), mającą końce w punktach $(-a, 0), (a, 0)$ i taką, że wraz z odcinkiem osi X, $[-a, a]$ ogranicza ona maksymalne pole.

Zadanie 13. Problem Inwestora
Inwestor posiada w banku oszczędności w wysokości S. Chciałby optymalnie wykorzystać je w czasie swojego życia $[0, T]$ (założymy, że T ustalone). Załóżmy, że jego chwilowe zadowolenie wyraża się wzorem $E(r) = 2\sqrt{r}$ gdzie r jest chwilową szybkością wydawania pieniędzy. Swoje przyszłe zadowolenie inwestor dyskontuje czynnikiem $\beta > 0$ (złotówka wydana na przyjemności za rok jest mniej warta niż złotówka, którą możemy wydać w tej chwili). Chce on zatem zmaksymalizować następującą wielkość

$$\int_0^T e^{-\beta t} E(r(t))dt.$$

Załóżmy dodatkowo, że oszczędności w banku są oprocentowane α w skali roku i kapitalizacja odsetek odbywa się w sposób ciągły, tzn. jeśli przez $x(t)$ oznaczymy kapitał posiadany przez inwestora w momencie t, to

$$\dot{x}(t) = \alpha x(t) - r(t).$$

1. Pokazać, że powyższy problem jest równoważny maksymalizowaniu funkcjonału
$$J(x) = \int_0^T e^{-\beta t} 2\sqrt{\alpha x(t) - \dot{x}(t)}dt, \quad x(0) = S,\ x(T) = 0.$$
2. Wyznaczyć równania Eulera-Lagrange'a dla powyższego problemu i pokazać, że
$$\alpha x - \dot{x} = r(0)e^{2(\alpha-\beta)t}.$$
3. Zakładając $\alpha > \beta > \frac{\alpha}{2}$ rozwiązać powyższe równanie otrzymując tym samym wzór na optymalną strategię.

Zadanie 14. Spółka górnicza zamierza wyeksploatować Q tonowe złoże węgla brunatnego w okresie czasu $[0, T]$. Wydobyty węgiel jest od razu sprzedawany po cenie netto za tonę daną wzorem

$$p(x, x') = P - \alpha x - \beta x',$$

gdzie P, α, β dodatnie stałe, $x(t)$ wielkość wydobycia do czasu t (wraz z wyczerpywaniem się złoża oraz wraz ze wzrostem szybkości produkcji rosną koszty wydobycia). Podać optymalną strategię wydobycia, $x(t)$ jeśli

1. firma chce maksymalizować całkowity zysk, czyli
$$\int_0^T p(x(t), x'(t))x'(t)dt,$$
2. firma dyskontuje przyszłe zyski czynnikiem e^{-rt}, $r > 0$, to znaczy, chce zmaksymalizować
$$\int_0^T e^{-rt} p(x(t), x'(t))x'(t)dt.$$

   Wyznaczyć strategię dla następujących wartości stałych:
$$\alpha = 4,\ \beta = 1,\ r = 1,\ P = 2.$$