

Teoria sterowania

Kolokwium II (31 maja 2006, 18:15–19:45)

Zadanie 1. Dane jest równanie drugiego rzędu

$$\ddot{x} - \dot{x} = u, \quad x \in \mathbb{R}, \quad |u| \leq 1.$$

Rozwiąż problem czasooptymalnego sterowania do punktu $(x, \dot{x}) = (0, 0)$.

- (i) Podaj równania fragmentów trajektorii optymalnych,
- (ii) Podaj liczbę zmian sterowania i ich miejsce geometryczne,
- (iii) Znajdź obszar, z którego $(x, \dot{x}) = (0, 0)$ jest osiągalny,
- (iv) Naszkicuj rysunek.

Zadanie 2. Korzystając z ZMP wyznacz optymalną trajektorię dla następującego problemu

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u \end{cases} \quad u \in \mathbb{R},$$
$$x(0) = (3 - e, 0), \quad x(1) = (0, 0)$$
$$\frac{1}{2} \int_0^1 u^2 dt \rightarrow \min$$

Zadanie 3. Oblicz drugą wariację funkcjonału długości metryki euklidesowej na płaszczyźnie. Jakie wnioski o optymalności możesz wysnuć?

Zadanie 4. W $\mathbb{R}^n$ dana jest podrozmaitość M wymiaru $n - 1$. Niech $N \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ będzie podrozmaitością składającą się z par (x, p) , gdzie $x \in M$, a p jest wektorem prostopadłym do M w punkcie x . Wykaż, że N jest Lagrangowska.

Zadanie 5. (nieobowiązkowe) Wykaż twierdzenie o niezmienniku całkowym Poincarego-Cartana. Weźmy rozszerzoną przestrzeń fazową $\mathbb{R}^{2n+1}$ ze współrzędnymi $p_1, \dots, p_n, x_1, \dots, x_n, t$. Niech dana będzie funkcja Hamiltona $H(p, x, t)$. Niech dwie krzywe zamknięte γ_1, γ_2 obejmują jedną i tę samą rurkę trajektorii pola hamiltonowskiego pochodzącego od funkcji H . Wtedy całki z formy $p dq - H dt$ po obu tych krzywych są równe.