Topologia algebraiczna II

Zadania domowe (seria II)

Zadanie 1. Oblicz $\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_m\otimes\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_m\otimes\mathbb{Z}_n, \mathbb{Q}\otimes\mathbb{Z}, \mathbb{Q}\otimes\mathbb{Z}_m$.

Zadanie 2. Dla grup abelowych G, H grupę $\mathrm{Tor}(G,H)$ definiuje się następująco. Przypuśćmy, że $0\to F_1\to F_2\to G\to 0$ jest krótkim ciągiem dokładnym, gdzie F_1, F_2 to grupy wolne. Tensorując przez G otrzymujemy odwzorowanie $F_1\otimes G\to F_2\otimes G$. $\mathrm{Tor}(G,H)$ definiujemy jako jądro tego odwzorowania. Okazuje się, że ta definicja nie zależy od wyboru F_1, F_2.
(a) Wykaż, że $\mathrm{Tor}(A,B)=0$, jeśli A lub B jest wolna,
(b) Oblicz Tor $(\mathbb{Z}_m,\mathbb{Z}_n)$,
(c) Wykaż, że $\mathrm{Tor}(A,B)$=$\mathrm{Tor}(B,A)$.

Zadanie 3. Znajdź przestrzenie topologiczne, których nakrycia uniwersalne są ściągalne, o następujących grupach podstawowych: $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$.

Zadanie 4. Nakrycia uniwersalne których powierzchni orientowalnych są ściągalne?

Twierdzenie. Niech $K(G,1)$ oznacza przestrzeń topologiczną o grupie podstawowej G, której nakrycie uniwersalne jest ściągalne (Dla każdej grupy G istnieje $K(G,1)$.) Niech X będzie spójnym CW kompleksem i Y będzie $K(G,1)$. Wówczas każdy homomorfizm $\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,y_0)$ jest indukowany przez przekształcenie ciągłe $(X,x_0)\to(Y,y_0)$, które jest jedyne z dokładnością do homotopii trzymającej x_0.

Zadanie 5. Korzystając z powyższego stwierdzenia wykaż, że dowolne dwie przestrzenie $K(G,1)$, które są CW kompleksami, są homotopijnie równoważne.

Zadanie 6. Niech $\langle X,Y\rangle$ oznacza zbiór klas homotopii zachowującej punkty bazowe przekształceń ciągłych $(X,x_0)\to(Y,y_0)$. Wykaż, że jeśli X jest spójnym CW kompleksem, a G jest grupą abelową, to przyporządkowanie $\langle X,K(G,1)\rangle\to H^1(X,G)$, które przypisuje przekształceniu $f\colon X\to K(G,1)$ indukowany homomorfizm $f_*\colon H_1(X)\to H_1(K(G,1))=G$, jest bijekcją (utożsamiamy $H^1(X,G)$ z $\mathrm{Hom}(H_1(X),G)$ jak w twierdzeniu o współczynnikach uniwersalnych).

Topologia algebraiczna II

Zadania domowe (seria II)

Zadanie 1. Oblicz $\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_m\otimes\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_m\otimes\mathbb{Z}_n, \mathbb{Q}\otimes\mathbb{Z}, \mathbb{Q}\otimes\mathbb{Z}_m$.

Zadanie 2. Dla grup abelowych G, H grupę $\mathrm{Tor}(G,H)$ definiuje się następująco. Przypuśćmy, że $0\to F_1\to F_2\to G\to 0$ jest krótkim ciągiem dokładnym, gdzie F_1, F_2 to grupy wolne. Tensorując przez G otrzymujemy odwzorowanie $F_1\otimes G\to F_2\otimes G$. $\mathrm{Tor}(G,H)$ definiujemy jako jądro tego odwzorowania. Okazuje się, że ta definicja nie zależy od wyboru F_1, F_2.
(a) Wykaż, że $\mathrm{Tor}(A,B)=0$, jeśli A lub B jest wolna,
(b) Oblicz Tor $(\mathbb{Z}_m,\mathbb{Z}_n)$,
(c) Wykaż, że $\mathrm{Tor}(A,B)$=$\mathrm{Tor}(B,A)$.

Zadanie 3. Znajdź przestrzenie topologiczne, których nakrycia uniwersalne są ściągalne, o następujących grupach podstawowych: $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$.

Zadanie 4. Nakrycia uniwersalne których powierzchni orientowalnych są ściągalne?

Twierdzenie. Niech $K(G,1)$ oznacza przestrzeń topologiczną o grupie podstawowej G, której nakrycie uniwersalne jest ściągalne (Dla każdej grupy G istnieje $K(G,1)$.) Niech X będzie spójnym CW kompleksem i Y będzie $K(G,1)$. Wówczas każdy homomorfizm $\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,y_0)$ jest indukowany przez przekształcenie ciągłe $(X,x_0)\to(Y,y_0)$, które jest jedyne z dokładnością do homotopii trzymającej x_0.

Zadanie 5. Korzystając z powyższego stwierdzenia wykaż, że dowolne dwie przestrzenie $K(G,1)$, które są CW kompleksami, są homotopijnie równoważne.

Zadanie 6. Niech $\langle X,Y\rangle$ oznacza zbiór klas homotopii zachowującej punkty bazowe przekształceń ciągłych $(X,x_0)\to(Y,y_0)$. Wykaż, że jeśli X jest spójnym CW kompleksem, a G jest grupą abelową, to przyporządkowanie $\langle X,K(G,1)\rangle\to H^1(X,G)$, które przypisuje przekształceniu $f\colon X\to K(G,1)$ indukowany homomorfizm $f_*\colon H_1(X)\to H_1(K(G,1))=G$, jest bijekcją (utożsamiamy $H^1(X,G)$ z $\mathrm{Hom}(H_1(X),G)$ jak w twierdzeniu o współczynnikach uniwersalnych).