Topologia algebraiczna II

Zadania domowe (seria I)

Zadanie 1. Oblicz (korzystając z komórkowego kompleksu łańcuchowego) grupy kohomologii (o współczynnikach w $\mathbb{Z}$ i w $\mathbb{Z}_2$) przestrzeni $\mathcal{S}^\infty, \mathbb{RP}^\infty$ oraz $\mathbb{CP}^\infty$.

Zadanie 2. Oblicz dla każdej pary liczb $m, n \geqslant 2$ grupę $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n)$.

Zadanie 3. Przestrzenią soczewkową $L_{p,q}$, gdzie $p < q$ są względnie pierwszymi liczbami naturalnymi, nazywamy przestrzeń topologiczną otrzymaną w następujący sposób. Rozważmy kulę wymiaru 3, na której brzegu $\mathcal{S}^2$ dokonujemy następującego utożsamienia. Każdy punkt górnej półsfery utożsamiamy z punktem dolnej półsfery otrzymanym z wyjściowego punktu przez symetrię względem równika oraz obrotu wokół osi biegunów o kąt $\frac{2\pi p}{q}$. (W szczególności $L_{1,2} \simeq \mathbb{RP}^3$.) Oblicz grupy kohomologii (o współczynnikach w $\mathbb{Z}$) przestrzeni soczewkowych.

Zadanie 4. Niech $\Lambda^n(\mathcal{S}^1)$ oznacza przestrzeń liniową antysymetrycznych form gładkich na okręgu $\mathcal{S}^1$ (można je utożsamiać z formami na $\mathbb{R}$ okresu 1). Zauważ, że tylko $\Lambda^0(\mathcal{S}^1)$ oraz $\Lambda^1(\mathcal{S}^1)$ są nietrywialne. $\Lambda^0(\mathcal{S}^1)$ to przestrzeń funkcji gładkich na $\mathcal{S}^1$, a $\Lambda^1(\mathcal{S}^1)$ to przestrzeń 1–form gładkich na $\mathcal{S}^1$ (albo inaczej 1–form okresowych na $\mathbb{R}$, które można zapisywać jako $g(x)dx$, gdzie $g(x)$ jest funkcją okresu 1). Między $\Lambda^0(\mathcal{S}^1)$ a $\Lambda^1(\mathcal{S}^1)$ działa przekształcenie różniczki funkcji. To przekształcenie traktujemy jako przekształcenie kobrzegu kompleksu kołańcuchowego $\Lambda^n(\mathcal{S}^1)$. Oblicz kohomologie tego kompleksu.

Topologia algebraiczna II

Zadania domowe (seria I)

Zadanie 1. Oblicz (korzystając z komórkowego kompleksu łańcuchowego) grupy kohomologii (o współczynnikach w $\mathbb{Z}$ i w $\mathbb{Z}_2$) przestrzeni $\mathcal{S}^\infty, \mathbb{RP}^\infty$ oraz $\mathbb{CP}^\infty$.

Zadanie 2. Oblicz dla każdej pary liczb $m, n \geqslant 2$ grupę $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n)$.

Zadanie 3. Przestrzenią soczewkową $L_{p,q}$, gdzie $p < q$ są względnie pierwszymi liczbami naturalnymi, nazywamy przestrzeń topologiczną otrzymaną w następujący sposób. Rozważmy kulę wymiaru 3, na której brzegu $\mathcal{S}^2$ dokonujemy następującego utożsamienia. Każdy punkt górnej półsfery utożsamiamy z punktem dolnej półsfery otrzymanym z wyjściowego punktu przez symetrię względem równika oraz obrotu wokół osi biegunów o kąt $\frac{2\pi p}{q}$. (W szczególności $L_{1,2} \simeq \mathbb{RP}^3$.) Oblicz grupy kohomologii (o współczynnikach w $\mathbb{Z}$) przestrzeni soczewkowych.

Zadanie 4. Niech $\Lambda^n(\mathcal{S}^1)$ oznacza przestrzeń liniową antysymetrycznych form gładkich na okręgu $\mathcal{S}^1$ (można je utożsamiać z formami na $\mathbb{R}$ okresu 1). Zauważ, że tylko $\Lambda^0(\mathcal{S}^1)$ oraz $\Lambda^1(\mathcal{S}^1)$ są nietrywialne. $\Lambda^0(\mathcal{S}^1)$ to przestrzeń funkcji gładkich na $\mathcal{S}^1$, a $\Lambda^1(\mathcal{S}^1)$ to przestrzeń 1–form gładkich na $\mathcal{S}^1$ (albo inaczej 1–form okresowych na $\mathbb{R}$, które można zapisywać jako $g(x)dx$, gdzie $g(x)$ jest funkcją okresu 1). Między $\Lambda^0(\mathcal{S}^1)$ a $\Lambda^1(\mathcal{S}^1)$ działa przekształcenie różniczki funkcji. To przekształcenie traktujemy jako przekształcenie kobrzegu kompleksu kołańcuchowego $\Lambda^n(\mathcal{S}^1)$. Oblicz kohomologie tego kompleksu.