

## Iloczyn tensorowy

Niech  $A, B$  będą grupami abelowymi. Niech  $F(A, B)$  będzie wolną grupą abelową o bazie  $A \times B$ , zaś  $N(A, B)$  jej podgrupą generowaną przez zbiór  $\{(a + a', b) - (a, b) - (a', b) \mid a, a' \in A, b \in B\} \cup \{(a, b + b') - (a, b) - (a, b') \mid a \in A, b, b' \in B\}$ . Definicja:  $A \otimes B = F(A, B)/N(A, B)$ . Obraz elementu  $(a, b)$  grupy  $F(A, B)$  w  $A \otimes B$  oznaczamy  $a \otimes b$ ; niech  $w: A \times B \rightarrow A \otimes B$  dane będzie przez  $w((a, b)) = a \otimes b$ .

1. Udowodnij, że jeśli  $C$  jest grupą abelową a  $\Phi: A \times B \rightarrow C$  jest dwuliniowe (tzn.  $\Phi(a, \cdot)$  i  $\Phi(\cdot, b)$  są homomorfizmami dla dowolnych  $a, b$ ), to istnieje jedyny homomorfizm  $\phi: A \otimes B \rightarrow C$  taki że  $\Phi = \phi \circ w$ .
2. Oblicz:  $\mathbf{Z} \otimes \mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Z}/n \otimes \mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Z}/n \otimes \mathbf{Z}/m$ . Zaobserwuj też prawdziwość wzorów  $(A \oplus B) \otimes C \cong (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)$ ,  $A \otimes B \cong B \otimes A$ .

Jak kohomologie ze współczynnikami  $G$  mają się do funktora  $\text{Hom}(\cdot, G)$ , tak homologie ze współczynnikami  $G$  mają się do funktora  $\cdot \otimes G$ . Przerób elukubracje z wykładu dotyczące kohomologii na odpowiadające im rozważania o homologiach ze współczynnikami. W szczególności rozwiąż poniższe zadania.

3. Niech  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  będzie dokładnym ciągiem grup abelowych, a  $G$  jeszcze jedną grupą abelową. Wykaż, że ciąg

$$(*) \quad A \otimes G \xrightarrow{\iota} B \otimes G \rightarrow C \otimes G \rightarrow 0$$

jest dokładny. Podaj przykład na to, że  $\iota$  nie musi być monomorfizmem. Udowodnij, że jeśli wyjściowy ciąg rozszczepia się, to  $\iota$  jest monomorfizmem i ciąg  $(*)$  rozszczepia się.

4. W oznaczeniach poprzedniego zadania: jeśli ciąg dokładny  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  jest wolną rezolwentą grupy  $C$  (tzn. jeśli  $A$  i  $B$  są wolne), to definiujemy  $\text{Tor}(C, G)$  jako  $\ker(\iota)$ . Uzasadnij, że  $\text{Tor}(C, G)$  nie zależy od wyboru wolnej rezolwenty  $C$  i jest funktorialny względem obu argumentów.
5. Wylicz  $\text{Tor}(C, G)$  dla  $(C, G) = (\mathbf{Z}, \mathbf{Z}), (\mathbf{Z}/n, \mathbf{Z}), (\mathbf{Z}, \mathbf{Z}/n), (\mathbf{Z}/n, \mathbf{Z}/m)$ . Przeprowadź też rachunki z grupami  $\mathbf{Q}$  i  $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ , jeśli nie możesz się powstrzymać.
6. Skonstruuj ciąg oraz uzasadnij jego dokładność i naturalność:

$$0 \rightarrow H_n X \otimes G \rightarrow H_n(X, G) \rightarrow \text{Tor}(H_{n-1} X, G) \rightarrow 0.$$

(Wsk.: narysuj diagram podobny do tego, który był na wykładzie, i przeprowadź polowanie.)