Klasy charakterystyczne

Zadania zaliczeniowe

Punktacja. Bdb–13 zadań, db–9 zadań, dst–6 zadań. Można korzystać z materiału z wykładu i ćwiczeń oraz z zadań z niniejszej listy o mniejszych numerach niż zadanie rozwiązywane.

Zadanie 1. Wykaż, że pewna liczba Stiefela–Whitneya zeruje się dla wszystkich rozmaitości gładkich odpowiedniego wymiaru.

Zadanie 2. Niech Ω_n oznacza grupę kobordyzmu niezorientowanych rozmaitości wymiaru n (współczynniki w $\mathbb{Z}_2$). Wykaż, że Ω_4 zawiera 4 różne elementy.

Zadanie 3. Wykaż, że zespolona wiązka styczna do $\mathbb{C}P^1 = S^2$ nie jest izomorficzna swojej wiązce dualnej.

Zadanie 4. Niech ξ będzie wiązką rzeczywistą wymiaru n. Wykaż, że istnieje *ciąg dokładny Gysina dla wiązek niezorientowanych*

$$\ldots \longrightarrow H^i(B;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\cup w_n} H^{i+n}(B;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\pi_0^*} H^{i+n}(E_0;\mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^{i+1}(B;\mathbb{Z}_2) \longrightarrow \ldots.$$

Zadanie 5. Niech $\widetilde{B}$ będzie nakryciem B stopnia 2. Wykaż, że istnieje ciąg dokładny

$$\ldots \longrightarrow H^{j-1}(B;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\cup w_1} H^j(B;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\pi_0^*} H^j(\widetilde{B};\mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^j(B;\mathbb{Z}_2) \longrightarrow \ldots.$$

Zadanie 6. Oblicz strukturę pierścienia $H^*(\widetilde{G}_n;\mathbb{Z}_2)$.

Zadanie 7. Wykaż, że wiązka rzeczywista ξ jest orientowalna wtedy i tylko wtedy kiedy $w_1(\xi) = 0$.

Zadanie 8. Wykaż, że homomorfizm $H^i(B;\mathbb{Z}) \to H^i(B,\mathbb{Z}_2)$ przekształca totalną klasę Cherna $c(\omega)$ na totalną klasę Stiefela–Whitneya $w(\omega_\mathbb{R})$. W szczególności nieparzyste klasy Stiefela Whitneya $\omega_\mathbb{R}$ są zerowe.

Zadanie 9. Wykaż, że $p_i(\xi)$ zredukowane mod 2 są równe $(w_{2i})^2(\xi)$.

Zadanie 10. Przedstaw $G_n(\mathbb{C}^\infty)$ jako kompleks komórkowy.

Zadanie 11. Niech $V_{n-q}(\mathbb{C}^n)$ oznacza zespoloną rozmaitość Stiefela składającą się z zespolonych $(n-q)$–reperów w $\mathbb{C}^n$, gdzie $0 \leqslant q < n$. Wykaż, że ta rozmaitość jest $2q$–spójna oraz $\pi_{2q+1}V_{n-q}(\mathbb{C}^n) = \mathbb{Z}$. Dla n–wymiarowej wiązki zespolonej nad CW–kompleksem B o włóknie F, oznaczmy przez $V_{n-q}(\omega)$ stowarzyszoną wiązkę nad B o włóknie $V_{n-q}(F)$. Wykaż, że pierwszą przeszkodą do istnienia cięcia $V_{n-q}(\omega)$ jest klasa Cherna $c_{q+1}(\omega) \in H^{2q+2}(B;\mathbb{Z}) = H^{2q+2}(B;\pi_{2q+1}V_{n-q}(F))$.

Zadanie 12. Wykaż, że jeśli Λ jest dziedziną całkowitości zawierającą $\frac{1}{2}$, to pierścień kohomologii $H^*(G_n(\mathbb{R}^\infty);\Lambda)$ jest pierścieniem wielomianów nad Λ generowanym przez klasy Pontryagina $p_1(\gamma^n), \ldots, p_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(\gamma^n)$.

Zadanie 13. *Charakterem Cherna* $ch(\omega)$ zespolonej wiązki wektorowej wymiaru n nazywamy sumę

$$n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_k(c(\omega))}{k!} \in H^*(B;\mathbb{Q}).$$

Wykaż, że charakter Cherna może być scharakteryzowany przez własność $ch(\omega \oplus \omega') = ch(\omega) +$

$ch(\omega')$ oraz przez własność, że $ch(\eta^1) = \exp(c_1(\eta^1))$ dla wiązek liniowych η^1. Wykaż, że charakter Cherna jest również multiplikatywny, tzn. $ch(\omega \otimes \omega') = ch(\omega)ch(\omega')$.

Zadanie 14. Niech $2i_1, \ldots, 2i_r$ będzie podziałem liczby $2k$. Wykaż, że $4k$–wymiarowa klasa charakterystyczna $s_{2i_1,\ldots,2i_r}(c(\omega))$ zespolonej wiązki ω jest równa klasie $s_{i_1,\ldots,i_r}(p(\omega_{\mathbb{R}}))$. W szczególności $4k$–wymiarowa klasa $s_{2,\ldots,2}(c(\omega))$ jest równa $p_k(\omega_{\mathbb{R}})$ oraz $s_{2n}(c)[K^{2n}] = s_n(p)[K^{2n}]$ dla K^{2n} zespolonej rozmaitości wymiaru $2n$.

Zadanie 15. Uzasadnij, że krótkiemu ciągowi dokładnemu grup $A \to B \to C$ odpowiada rozwłóknienie $K(A,1) \to K(B,1) \to K(C,1)$. Oblicz wszystkie różniczki na drugiej tablicy ciągu spektralnego Serre'a dla rozwłóknienia odpowiadającego ciągowi $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_2$. W szczególności uzasadnij, że można stosować ciąg spektralny Serre'a, tzn. $\pi_1(K(\mathbb{Z}_2,1))$ działa trywialnie na $H_*(K(\mathbb{Z}_2,1);\mathbb{Z})$.

Zadanie 16. Oblicz grupy homologii i pierścień kohomologii homotopijnego włókna odwzorowania $S^k \to S^k$ stopnia n.

Zadanie 17. Niech X będzie wiązką $S^2 \to X \to S^2$ zdefiniowaną w następujący sposób: Niech $h\colon S^3 \to S^2$ będzie odwzorowaniem Hopfa. Definiujemy $X = I \times S^3/\sim$, gdzie $(t,x) \sim (s,y)$ jeśli $t = s = 0$ lub $t = s = 1$ oraz $h(x) = h(y)$. Odwzorowanie $X \to S^2$ definiujemy przez $(t,x) \to h(x)$. Wykaż, że struktura pierścienia ostatniej tablicy ciągu spektralnego Serre'a nie pokrywa się ze strukturą pierścienia $H^*(X,\mathbb{Z})$. Wskazówka: Znajdź odwzorowanie $X \to \mathbb{C}P^2$ świadczące o tym, że w $H^2(X,\mathbb{Z})$ istnieje element, którego kwadrat jest generatorem $H^4(X,\mathbb{Z})$.