**Geometryczna teoria grup**
**zadania przygotowawcze do pierwszego kolokwium**

**Zadanie 1.** Wykaż, że każda beztorsyjna 3–generowana grupa przedstawiająca się (nietrywialnie) jako produkt wolny dopuszcza epimorfizm na $\mathbf{Z}$.

**Zadanie 2.** Wykaż, że jeśli $H$ jest skończenie generowaną podgrupą $A *_C B$ lub $A*_C$, która nie przedstawia się jako produkt wolny z amalgamacją ani nie dopuszcza epimorfizmu na $\mathbf{Z}$, to $H$ jest zawarta w sprzężeniu $A$ lub $B$. Czy założenie o skończonej generowalności jest potrzebne?

**Zadanie 3.** (*) Niech $A, B$, będą skończenie generowane i nietrywialne. Wykaże, że podgrupy normalne $A * B$ są trywialne lub skończonego indeksu.

**Zadanie 4.** Niech $\mathcal{G}$ będzie grafem grup. Niech $T$ będzie drzewem Bassa–Serre'a $\mathcal{G}$ z działaniem $\pi_1(\mathcal{G})$. Wykaż, że graf grup $T/\pi_1(\mathcal{G})$ jest równy $\mathcal{G}$.

**Zadanie 5.** Znajdź grafy Cayleya poniższych grup i sprawdź, które z nich mają własność (FA).

(i) $\langle s, t, r \mid s^2 = t^2 = r^2 = (st)^2 = (tr)^3 = (rs)^5 = 1\rangle$,

(ii) $\langle s, t, r \mid s^2 = t^2 = r^2 = (st)^2 = (tr)^4 = (rs)^4 = 1\rangle$,

(iii) $\langle s, t, r \mid s^2 = t^2 = r^2 = (st)^2 = (tr)^3 = (rs)^6 = 1\rangle$,

(iv) $\langle s, t, r \mid s^3 = t^2 = r^2 = (tr)^3 = sts^{-1}r = 1\rangle$,

(v) $\langle s, t, r \mid [s, r] = 1,\ t^{-1}st = s^2,\ t^{-1}r^2t = r\rangle$,

(vi) $\langle s, t \mid t^{-1}st = s^2\rangle$.

**Zadanie 6.** Niech $H$ będzie podgrupą normalną grupy $G$. Wykaż, że jeśli grupy $H$ i $G/H$ mają własność (FA), to $G$ także ma własność (FA).

**Zadanie 7.** Niech $G$ będzie grupą izometrii $\mathbf{R}^2$ działającą *właściwie* (tzn. dla każdego zwartego $K \subset \mathbf{R}^2$ zbiór $\{\gamma \in G \mid \gamma(K) \cap K \neq \emptyset\}$ jest skończony). Wykaż, że $G$ ma podgrupę skończonego indeksu izomorficzną z $\mathbf{Z}^2, \mathbf{Z}$ lub grupą trywialną. Wskazówka:

$$0 \to \mathbf{R}^2 \to \operatorname{Isom} \mathbf{R}^2 \to \operatorname{Isom} S^1 \to 0.$$

**Zadanie 8.** Podaj przykład grupy (nieskończenie generowanej) bez (FA), która nie przedstawia się jako produkt wolny z amalgamacją i nie dopuszcza epimorfizmu na $\mathbf{Z}$.

**Zadanie 9.** (**) Wykaż, że $\mathbf{SL}_3(\mathbf{Z})$ ma własność (FA).

**Zadanie 10.** Niech $T$ będzie drzewem, $g$ hiperboliczną, a $h$ eliptyczną izometrią $T$. Wykaż, że jeśli zbiór punktów stałych $h$ jest rozłączny z osią $g$, to $g \circ h$ jest hiperboliczna.

**Zadanie 11.**

(i) Zrealizuj grupę o prezentacji

$$G = \langle s, t, r \mid s^2 = r^2 = t^2 = (sr)^4 = (rt)^4 = (st)^4 \rangle$$

jako podgrupę izometrii $\mathbf{H}^2$.

(ii) Oblicz pole powierzchni ilorazu $D = \mathbf{H}^2/G$.

(iii) Niech $P$ będzie jednospójnym wielokątem, będącym sumą kopii $D$, w odpowiednim parkietażu $\mathbf{H}^2$. Oszacuj liczbę kopii $D$ w $P$ przez liczbę krawędzi na obwodzie $P$.

**Zadanie 12.** Zrealizuj grupę

$$\langle a_1, a_2, b \mid [a_1, a_2]b^2 = 1 \rangle$$

jako podgrupę grupy izometrii $\mathbf{H}^2$. Wykaż, że algorytm Dehna działa poprawnie dla tej prezentacji (nie korzystając z twierdzenia o grupach małych skreśleń).

**Zadanie 13.** Jakie możliwie najsilniejsze warunki małych skreśleń spełniają prezentacje

(i) $\langle a, b \mid a^8 = b^8 = abababab = ab^{-1}ab^{-1}ab^{-1}ab^{-1} = 1 \rangle$,

(ii) $\langle a_1, a_2, b \mid [a_1, a_2]b^2 = 1 \rangle$,

(iii) $\langle a, t \mid t^{-1}a^2t = a^3 \rangle$,

(iv) $\langle s, t \mid sts = tst \rangle$?

**Zadanie 14.** (*) Znajdź węzeł w $S^3$, którego dopełnienie ma grupę podstawową $\langle s, t \mid s^2t^2 = ts \rangle$.

**Problem otwarty.** Kompleks komórkowy, którego komórkami są kwadraty nazywamy *niedodatnio zakrzywionym*, jeśli jego linki są grafami bez pętli długości mniejszej niż 4. Wykaż, że istnieje $n > 0$ o następującej własności. Przypuśćmy, że grupa $G = \langle S \rangle$ działa przez izometrie na jednospójnym kompleksie niedodatnio zakrzywionym $X$. Załóżmy, że dla każdego słowa $w$ nad $S$ długości nie większej niż $n$, $[w] \in G$ ma punkt stały w $X$. Wtedy $G$ ma punkt stały w $X$.
Uwaga. Pokazaliśmy, że dla $X$ drzewa wystarczy wziąć $n = 2$.

**Definicja.** Przestrzeń metryczną nazywamy *geodezyjną*, jeśli każdą parę punktów można połączyć *geodezyjną*, tzn. izometrycznie włożonym odcinkiem. Geodezyjną przestrzeń metryczną nazywamy $\mathbf{R}$–*drzewem* lub *drzewem metrycznym*, jeśli dla każdej trójki punktów dowolne trzy łączące je geodezyjne mają punkt wspólny. W szczególności drzewo symplicjalne jest $\mathbf{R}$–drzewem.

**Zadanie 15.** Wykaż, że każda izometria $\mathbf{R}$–drzewa jest eliptyczna lub hiperboliczna.

**Zadanie 16.** Znajdź wolne działanie $\mathbf{Z}^n$ na $\mathbf{R}$–drzewie (zwróć uwagę, że dowolna grupa działająca w sposób wolny na drzewie symplicjalnym jest wolna).

**Zadanie 17.** (**) Znajdź wolne działanie grupy podstawowej każdej powierzchni $\neq \mathbf{RP}^2$ na $\mathbf{R}$–drzewie.

**Twierdzenie (Rips).** *Grupa skończenie generowana działająca w sposób wolny na* $\mathbf{R}$*–drzewie jest produktem wolnym grup wolnych abelowych* $\mathbf{Z}^n$ *i grup podstawowych powierzchni* $\neq \boldsymbol{RP}^2$.